

Н.М.ГЮНТЕР и Р.О.КУЗЬМИН

СБОРНИК  
ЗАДАЧ  
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



ГОСТЕХИЗДАТ 1949

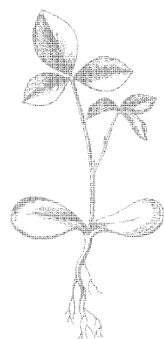
**Н. М. ГЮНТЕР и Р. О. КУЗЬМИН**

# **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

**ТОМ I**

**ИЗДАНИЕ ДВЕНАДЦАТОЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ**

*Допущено Министерством высшего  
образования СССР в качестве учебного  
пособия для вузов*



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД**

Редактор *А. И. Ченмарев*

Техн. редактор *К. М. Волков*

---

Подписано к печати 1/II 1949 г. Тираж 50.000 экз. 14 печ. л. 16,66 уч.-изд. л.  
50 000 тип. зн. в печ. л. А 01559. Цена книги 5 р. 75 к. Переплёт 1 р. Заказ 4549.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗ  
при Совете Министров СССР, Ленинград, Измайловский пр., 29.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ОТДЕЛ I

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Векторы, проекции и координаты на плоскости. Простейшие приложения . . . . .	7
§ 2. Прямая и окружность . . . . .	9
§ 3. Геометрические места . . . . .	14
§ 4. Кривые 2-го порядка в простейшем виде . . . . .	16
§ 5. Кривые 2-го порядка, заданные уравнением в общем виде . . . . .	20
§ 6. Центр, диаметры и упрощение уравнений 2-го порядка . . . . .	22
§ 7. Сопряжённые диаметры. Оси симметрии. Асимптоты . . . . .	25
§ 8. Фокусы и директрисы . . . . .	26
§ 9. Касательные к кривым 2-го порядка. Полюсы и поляры . . . . .	27
§ 10. Разные задачи . . . . .	28

## ОТДЕЛ II

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Векторы и координаты в пространстве . . . . .	31
§ 2. Плоскость . . . . .	33
§ 3. Прямая в пространстве . . . . .	35
§ 4. Образование поверхностей . . . . .	39
§ 5. Поверхности 2-го порядка. Центр и диаметральные плоскости . . . . .	42
§ 6. Касательные плоскости и прямые к поверхностям 2-го порядка . . . . .	46
§ 7. Упрощение уравнений поверхностей 2-го порядка . . . . .	50
§ 8. Круговые сечения, прямолинейные образующие и другие задачи . . . . .	54

## ОТДЕЛ III

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Теория пределов . . . . .	57
§ 2. Разные задачи . . . . .	63
§ 3. Понятие о функции. Непрерывность. Графическое представление функций . . . . .	67
§ 4. Нахождение производных . . . . .	72
§ 5. Геометрическое значение производной . . . . .	75
§ 6. Производные высших порядков . . . . .	76
§ 7. Функции нескольких переменных. Их производные и дифференциалы . . . . .	80
§ 8. Дифференцирование неявных функций . . . . .	86
§ 9. Замена переменных . . . . .	88

## ОТДЕЛ IV

### ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

§ 1. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Возрастание и убывание функций и неравенства . . . . .	93
§ 2. Нахождение наибольших и наименьших значений функций одного переменного . . . . .	96

§ 3.	Построение графиков функций . . . . .	97
§ 4.	Разные задачи на наибольшие и наименьшие значения . . . .	99
§ 5.	Ряды, их сходимость . . . . .	102
§ 6.	Разложение в ряды . . . . .	108
§ 7.	Ряды и действия с ними . . . . .	114
§ 8.	Раскрытие неопределённости . . . . .	119
§ 9.	Экстремальные значения функций нескольких переменных . .	121

## ОТДЕЛ V

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1.	Уравнения кривых и их виды . . . . .	127
§ 2.	Касательная и нормаль . . . . .	130
§ 3.	Выпуклость, кривизна и радиус кривизны . . . . .	135
§ 4.	Эволюты кривых . . . . .	137
§ 5.	Огибающие кривые . . . . .	138
§ 6.	Построение кривых . . . . .	140
§ 7.	Кривые двойкой кривизны: касательная прямая и нормальная плоскость . . . . .	147
§ 8.	Кривые двойкой кривизны: соприкасающаяся плоскость, нормаль и бинормаль . . . . .	150
§ 9.	Поверхности. Их уравнения . . . . .	154
§ 10.	Касательные плоскости и нормали. Огибающие . . . . .	155
§ 11.	Линии на поверхностях и кривизна поверхностей . . . . .	160
О т в е т ы	. . . . .	165

---

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В основе предлагаемого задачника лежит сборник задач по высшей математике, составленный в 1912 г. сотрудниками кафедры математики Института инженеров путей сообщения, во главе которой стоял Н. М. Гюнтер. В нескольких дальнейших изданиях того же задачника принимали участие работники физико-математического факультета Ленинградского университета. Последние издания выходили под редакцией Н. М. Гюнтера и моей. Ввиду смерти Н. М. Гюнтера, последовавшей в 1941 г., вся работа над новым изданием книги была проведена мною.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к печати этого издания была проведена большая работа по выявлению опечаток и недосмотров, имевшихся в предыдущем издании. С этой целью все задачи были решены сотрудниками кафедры математики Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина. В этой большой работе приняли участие следующие лица:

С. И. Амосов, Е. А. Анфертьева, М. И. Болгов, Г. Н. Бровкович, Д. Л. Гавра, Д. С. Горшков, А. Б. Гур-Мильнер, А. И. Добрадина, М. М. Добулевич, В. Л. Кан, А. Б. Кордашенко, Т. И. Лаппо, Н. А. Никольская, С. Н. Нумеров, А. П. Соболев, П. Ф. Черенков.

Всем им выражаю глубокую благодарность.

*Р. О. Кузьмин*

---

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## § 1. Векторы, проекции и координаты на плоскости.

### Простейшие приложения

1. Даны точки  $A(2, 5)$  и  $B(-3, 2)$ . Найти проекции вектора  $AB$  на оси координат.
2. Даны точки  $A(1, 2)$  и  $B(5, -1)$ . Найти углы вектора  $AB$  с осями  $Ox$  и  $Oy$ , а также длину этого вектора.
3. Даны точки  $A(2, -1)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(3, 5)$ ,  $D(-5, 11)$ . Найти угол между векторами  $AB$  и  $CD$ .
4. Даны точки  $A(2, -1)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(4, 7)$ ,  $D(-1, -5)$ . Найти проекцию вектора  $AB$  на направление вектора  $CD$ .
5. Даны точки  $A(3, 5)$ ,  $B(6, -2)$ . Найти проекцию вектора  $AB$  на ось, направленную из начала координат по биссектрисе первого координатного угла.
6. Из начала координат проведены векторы в точки  $A(1, 2)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(6, -10)$ . Найти их геометрическую сумму по величине и направлению.
7. Противоположные вершины прямоугольника суть  $A(3, 7)$ ,  $B(11, -1)$ . Найти центр прямоугольника.
8. Из точки  $A(2, 3)$  проведён отрезок до точки  $B(7, -2)$  и продолжён ещё на столько же. Найти координаты конца продолжения.
9. Отрезок  $AB$  разделён на три равные части точками  $M_1(1, 2)$  и  $M_2(3, 4)$ . Найти точки  $A$  и  $B$ .
10. Точки  $M_1(1, 1)$ ,  $M_2(2, 2)$ ,  $M_3(3, -1)$  — три последовательные вершины параллелограмма. Найти четвёртую вершину.
11. Середины сторон треугольника — в точках  $M_1(-2, 1)$ ,  $M_2(2, 3)$ ,  $M_3(4, -1)$ . Найти координаты вершин.
12. Две последовательные вершины квадрата — в точках  $A(2, 3)$  и  $B(6, 6)$ . Где остальные вершины?
13. Две последовательные вершины правильного шестиугольника — в точках  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(4, 0)$ . Где следующая вершина?
14. В точках  $(3, 5)$  и  $(9, -7)$  помещены массы 2 и 1. Где центр тяжести этих масс?
15. В точках  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  помещены массы  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  соответственно. Доказать, что координаты центра тяжести этих масс выражаются формулами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

16. Массы равной величины помещены в вершинах многоугольника. Доказать, что координаты их центра тяжести равны арифметическим средним координат вершин.

17. Центр правильного многоугольника — в начале координат. Доказать, что сумма координат вершин равна нулю.

18. К сторонам многоугольника восстановлены перпендикуляры, пропорциональные сторонам и направленные в наружную сторону. Доказать, что их геометрическая сумма равна нулю.

19. Даны координаты середин сторон многоугольника с нечётным числом сторон:  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , ...,  $M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})$ . Найти координаты вершин.

20. На оси  $Ox$  найти точку, расстояние которой до точки  $(5, 12)$  равно 13.

21.  $M_1(2, 1)$ ,  $M_2(-3, 2)$ ,  $M_3(-1, 1)$  — вершины треугольника. Найти центр и радиус описанного круга.

22. Вершины треугольника — в точках  $O(0, 0)$ ,  $M_1(3, 5)$ ,  $M_2(-2, 3)$ . Найти его площадь.

23. Вершины треугольника — в точках  $A(1, 2)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(-2, -5)$ . Найти его площадь.

24. Две вершины треугольника — в точках  $(5, 1)$ ,  $(-2, 2)$ , третья вершина — на оси  $Ox$ . Найти её, зная, что площадь равна 10.

25. Найти площадь четырёхугольника по координатам его вершин:  $M_1(5, 6)$ ,  $M_2(5, -6)$ ,  $M_3(-2, -1)$ ,  $M_4(-2, 1)$ .

26. Найти площадь четырёхугольника по координатам его вершин:  $M_1(5, 6)$ ,  $M_2(5, -6)$ ,  $M_3(-2, 1)$ ,  $M_4(-2, -1)$ .

27. Найти площадь пятиугольника по его вершинам:  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2(3, -2)$ ,  $M_3(5, -1)$ ,  $M_4(8, 4)$ ,  $M_5(4, 5)$ .

28. После переноса начала координат без поворота осей точка  $(2, 4)$  получила координаты  $(-3, 0)$ . Найти прежние координаты нового начала.

29. Новые оси делят на равные части углы между прежними. Ось  $Ox_1$  составляет положительный острый угол с  $Oy$ . Составить формулы преобразования координат.

30. Новое начало — в точке  $(2, 3)$ . Точка  $(6, 0)$  — на положительном направлении новой оси ординат. Каковы новые координаты точки  $(7, 8)$ ?

31. Вершина квадрата — в точках  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ . Составить формулы преобразования координат, если за новые оси приняты диагонали квадрата, а точка  $(2, 0)$  находится на положительном направлении оси  $O_1x_1$ .

32. Новое начало — в точке  $(1, -2)$ . Новая ось ординат составляет с прежней осью абсцисс острый угол, тангенс которого  $\frac{3}{4}$ . Найти точку, у которой прежние координаты равны новым.

33. При каком повороте осей величина  $x^2 - y^2$  переходит в  $2x_1y_1$ ?



34. Доказать, что при общем преобразовании координат (с поворотом осей) прежние оси могут быть совмещены с новыми путем поворота всей плоскости вокруг некоторой точки.

35. Даны полярные координаты точки:  $r=10$ ,  $\varphi=30^\circ$ . Найти её прямоугольные координаты, если полюс — в точке  $(2, 3)$ , а полярная ось параллельна оси  $Ox$ .

36. Найти расстояние между точками, зная их полярные координаты:  $r_1=3$ ,  $\varphi_1=10^\circ$ ;  $r_2=5$ ,  $\varphi_2=130^\circ$ .

37. Полюс — в точке  $(3, 5)$ . Полярная ось параллельна положительному направлению оси  $Oy$ . Найти полярные координаты точек  $M_1(9, -1)$  и  $M_2(5, 5 + 2\sqrt{3})$ .

38. Рассматривая проекции некоторой ломаной линии, доказать формулы:

$$\sin \varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin (2n-1)\varphi = \frac{1 - \cos 2n\varphi}{2 \sin \varphi};$$

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos (2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2 \sin \varphi}.$$

## § 2. Прямая и окружность

39. Найти уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$  и удалённой от неё на  $h$ .

40. Найти уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  и удалённой от неё на  $h$ .

41. Вершина квадрата — в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ . Найти уравнения его диагоналей.

42. На прямой  $y=2x-3$  найти точку, ордината которой равна 7.

43. Считая, что ось  $Ox$  расположена горизонтально, определить, какие из точек  $M_1(-1, 2)$ ,  $M_2(-3, -10)$ ,  $M_3(2, 1)$ ,  $M_4(5, 4)$  расположены выше, ниже и на прямой  $y=2x-3$ .

44. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $(2, 1)$  и составляющей с  $Ox$  угол  $45^\circ$ .

45. Провести прямую через точки  $M_1(-1, 2)$  и  $M_2(2, 1)$ .

46. Найти уравнение прямой, проходящей через точки  $(3, 7)$  и  $(3, -2)$ .

47. Найти уравнения сторон треугольника, вершины которого — в точках  $M_1(1, -1)$ ,  $M_2(3, 5)$ ,  $M_3(-7, 11)$ .

48. Через точку  $(2, -1)$  провести прямую, параллельную прямой  $2x+3y=0$ .

49. Через точку  $(2, -3)$  провести прямую, перпендикулярную к прямой  $y=2x+1$ .

50. Через точку  $(3, 5)$  провести прямые под углом  $45^\circ$  к прямой  $3x-2y+7=0$ .

51. Найти углы треугольника с вершинами в точках  $M_1(0, 2)$ ,  $M_2(2, 2)$ ,  $M_3(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ ,

52. Найти вершины треугольника по уравнениям его сторон:  $x - y = 0$ ,  $2x + 3y + 5 = 0$ ,  $x + 2y + 6 = 0$ .

53. Найти площадь треугольника по уравнениям его сторон:  $y = 3x - 9$ ,  $y = -2x + 1$ ,  $y = -x + 3$ .

54. Через точку  $(1, 2)$  провести прямую, расстояния которой до точек  $(2, 3)$  и  $(4, -5)$  были бы одинаковы.

55. Уравнения двух сторон параллелограмма:  $x + 2y + 1 = 0$  и  $2x + y - 3 = 0$ . Центр его — в точке  $(1, 2)$ . Найти уравнения двух других сторон.

56. Через точку  $(-1, 2)$  провести прямую, расстояние которой до точки  $(6, 1)$  равно 5.

57. Через точку  $(2, -2)$  провести прямые, расстояния которых до точки  $(5, 2)$  равны 3.

58. Через точку  $(6, 8)$  провести прямую так, чтобы она образовала с осями координат треугольник, площадь которого равна 12.

59. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $(-4, 3)$  и удалённой от начала координат на расстояние, равное 5.

60. Дана прямая  $4x + 3y + 1 = 0$ . Найти прямую, параллельную данной и удалённую от неё на расстояние, равное 3.

61. Найти расстояние между прямыми  $2x + 3y = 7$ ,  $4x + 6y = 11$ .

62. Найти прямую, параллельную прямым  $x + 2y = 1$ ,  $x + 2y = 3$ , расположенную между ними и делящую расстояние между ними в отношении 1:3.

63. Найти уравнение прямой, лежащей по середине между данными прямыми  $3x + 2y = 5$ ,  $6x + 4y + 3 = 0$ .

64. Найти уравнение прямой, параллельной с прямой  $2x + 3y + 6 = 0$  и отсекающей от координатного угла треугольник с площадью 3.

65. Даны прямая  $2x + y - 3 = 0$  и точка  $M(1, 1)$  на ней. На той же прямой найти точки, удалённые от  $M$  на  $\sqrt{5}$ .

66. Найти уравнения сторон треугольника, у которого  $2x - 3y + 1 = 0$  и  $x + y = 0$  — высоты, а  $M(1, 2)$  — одна из вершин.

67.  $M_1(2, 1)$  и  $M_2(4, 9)$  — вершины треугольника,  $N(3, 4)$  — точка пересечения высот. Найти уравнения сторон.

68. Середины сторон треугольника — в точках  $(1, 2)$ ,  $(7, 4)$ ,  $(3, -4)$ . Найти уравнения сторон.

69. Пересечение медиан — в точке  $(-1, 0)$ , а  $x + y - 1 = 0$  и  $y + 1 = 0$  — уравнения двух сторон. Найти уравнение третьей стороны.

70. Вершины треугольника — в точках  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $C(2, -2)$ . Найти уравнения высот.

71. Через точку пересечения прямых  $x - y - 1 = 0$  и  $x + 2y - 2 = 0$  провести прямую, проходящую через точку  $(-1, 1)$ .

72. Провести прямую через начало координат и точку пересечения прямых  $17x + 29y = 317$  и  $3x + 10y = 634$ .

73. Через точку пересечения прямых  $x + 2y - 11 = 0$  и  $2x - y - 2 = 0$  провести прямую, расстояние которой от начала координат равно 5.

74. Через точку  $(-1, 1)$  провести прямую так, чтобы середина её отрезка между прямыми  $x + 2y - 1 = 0$  и  $x + 2y - 3 = 0$  лежала на прямой  $x - y - 1 = 0$ .

75. Через начало координат провести прямые так, чтобы отрезки их между прямыми  $x - y + 1 = 0$  и  $x - y - 2 = 0$  были равны 3.

76. Найти прямую, проходящую через точку  $(2, 3)$ , зная, что отрезок этой прямой между прямыми  $3x + 4y - 7 = 0$  и  $3x + 4y + 8 = 0$  равен  $3\sqrt{2}$ .

77. Найти биссектрисы углов между прямыми  $3x + 4y - 1 = 0$  и  $4x - 3y + 5 = 0$ .

78. Найти биссектрису того угла между прямыми  $4x + 7y - 3 = 0$  и  $8x - y + 6 = 0$ , в котором лежит начало координат.

79. Точки  $(1, 2)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(2, 1)$  — вершины треугольника. Найти уравнение биссектрисы внутреннего угла при точке  $(-1, -1)$ .

80. Найти радиус круга, вписанного в треугольник, если даны уравнения сторон:  $3x - 4y = 25$ ,  $5x + 12y = 65$ ,  $8x + 15y + 85 = 0$ .

81. Уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника  $2x - y + 8 = 0$ ,  $x - 2y - 12 = 0$ . Точка  $(4, 0)$  — на основании. Найти уравнение основания.

82. Луч света проходит через точку  $(2, 3)$ , отражается в прямой  $x + y + 1 = 0$  и попадает в точку  $(1, 1)$ . Найти уравнения луча падающего и луча отражённого.

83. Прямая  $2x + y - 1 = 0$  — внутренняя биссектриса, а точки  $(1, 2)$  и  $(-1, -1)$  — вершины треугольника. Найти третью вершину.

84. Точка  $(2, 5)$  — вершина треугольника, прямые  $3x + 4y - 12 = 0$  и  $x - y - 1 = 0$  — биссектрисы внутренних углов. Найти уравнения сторон.

85. Точки  $(1, 1)$  и  $(5, 4)$  — вершины треугольника,  $2x - y - 1 = 0$  — внутренняя биссектриса. Найти уравнения сторон, зная, что площадь треугольника равна 5.

86. Уравнение основания равнобедренного треугольника:  $x + y - 1 = 0$ , уравнение боковой стороны:  $x - 2y - 2 = 0$ . Точка  $(-2, 0)$  — на другой боковой стороне. Найти уравнение этой стороны.

87. Доказать, что сумма расстояний любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон есть величина постоянная.

88. Биссектрисы внутренних углов треугольника  $A$  и  $B$  пересекают его стороны в точках  $M$  и  $N$ . Доказать, что для любой точки отрезка  $MN$  сумма расстояний до сторон  $AC$  и  $BC$  равна расстоянию до стороны  $AB$ .

89. Через точку на биссектрисе угла проведены две прямые. Одна из них отсекает на сторонах угла, считая от вершины, отрезки  $a$  и  $b$ , другая — отрезки  $a_1$  и  $b_1$ . Доказать, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$ .

90. Взять прямые  $2x - y + 1 = 0$ ,  $x + 2y - 1 = 0$  за новые оси  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$ , выбрав направления так, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Найти формулы перехода от одних координат к другим.

91. Прямые  $x - y - 1 = 0$  и  $x + y + 2 = 0$  приняты за новые оси координат так, что новые координаты прежнего начала отрицательны. Найти новые уравнения прежних осей.

92. Прямая пересекает стороны треугольника  $AB$  и  $CB$  в точках  $M$  и  $N$ , а продолжение стороны  $AC$  в точке  $P$ . Доказать равенство

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

(теорема Менелая).

93. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника. Прямые  $AM$ ,  $BN$  и  $CP$  пересекаются в одной точке. Доказать равенство

$$AN \cdot BP \cdot CM = NC \cdot PA \cdot MB.$$

94. Доказать, что уравнения биссектрис треугольника можно написать в виде

$$s_1 \pm s_2 = 0, \quad s_1 \pm s_3 = 0, \quad s_2 \pm s_3 = 0,$$

где через  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  обозначены левые части уравнений сторон треугольника, взятых в нормальной форме.

95. Гомографическое или проективное преобразование плоскости состоит в том, что каждая точка  $(x, y)$  переходит в точку  $(x_1, y_1)$ , где

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c}{a_0x + b_0y + c_0}; \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}; \quad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 > 0.$$

Доказать, что при любом выборе коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) проективное преобразование представляет коллинеацию, т. е. переводит прямые в прямые.

96. Анггармоническим отношением четырёх точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , лежащих на прямой, называется отношение

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Доказать, что при проективном преобразовании величина анггармонического отношения не меняется.

97. Найти общий вид уравнений окружностей, касающихся оси  $Ox$  в начале координат.

98. Найти уравнение окружностей предыдущей задачи в полярных координатах, если полярная ось совпадает с положительной частью оси  $Ox$ .

99. Найти центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0.$$

100. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2(10, 0)$ ,  $M_3(6, 8)$ .

101. На окружности  $x^2 + y^2 = 1$  найти точку, одинаково удалённую от точек  $(1, 3)$  и  $(-2, 2)$ .

102. Найти уравнение круга, вписанного в треугольник, стороны которого даны уравнениями:

$$3x + 4y = 25, \quad 5x - 12y = 65, \quad 8x - 15y + 85 = 0.$$

103. Через точку  $(1, 2)$  провести касательную к окружности  $x^2 + y^2 = 5$ .

104. Через точку  $(-1, 3)$  провести касательные к окружности  $x^2 + y^2 = 5$ .

105. Найти общую хорду окружностей

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 2by.$$

106. Найти общие касательные к окружностям

$$x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 6y.$$

107. Точка  $(x_1, y_1)$  — вне окружности  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ . Найти длину  $l$  касательной из точки к окружности.

108. Точка  $(x_1, y_1)$  — внутри окружности  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ . Доказать, что хорда окружности, проходящая через  $(x_1, y_1)$ , делится этой точкой на части, произведение которых равно  $-(x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C)$ .

109. Окружность касается осей координат и проходит через точку  $(4, 8)$ . Найти её уравнение.

110. Окружность касается оси  $Oy$  и проходит через начало координат и точку  $(3, 6)$ . Найти её уравнение.

111. На оси  $Ox$  найти такую точку, касательные из которой к окружностям  $x^2 + y^2 = 6y - 6$  и  $x^2 + y^2 = 2x$  были бы одинаковой длины.

112. Найти общий вид окружностей, касающихся обеих биссектрис координатных углов.

113. Показать, что геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек находятся в данном отношении, не равном единице, есть окружность (окружность Аполлония).

114. Показать, что геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям имеют одинаковую длину, есть прямая (радикальная ось двух кругов).

115. Доказать, что при любых  $a$  и  $b$  окружности  $x^2 + y^2 = ax$  и  $x^2 + y^2 = by$  пересекаются под прямым углом. Здесь под углом между кривыми понимается, как обычно, угол между их касательными в точке пересечения.

116. Показать, что каждая из окружностей

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 + h^2$$

пересекается под прямым углом с каждой из окружностей

$$x^2 + (y \pm \sqrt{r^2 + h^2})^2 = r^2.$$

117. Доказать, что каждая из окружностей

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0$$

пересекается с каждой из окружностей

$$x^2 + y^2 - 2cy - b^2 = 0$$

под прямым углом.

### § 3. Геометрические места

118. Из начала координат проведены хорды окружности  $x^2 + y^2 = 2ax$ . Найти геометрическое место середин этих хорд.

119. Найти уравнение геометрического места точек, расстояния которых до прямых  $Ax + By + C = 0$  и  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  имеют отношение  $m:n$ .

120. Отрезок длиной  $a + b$  скользит концами по осям координат. Найти кривую, описанную точкой  $M$ , делящей его на части  $a$  и  $b$ . (Эллипсограф Леонардо да-Винчи.)

121. Проведены две окружности радиусов  $b$  и  $a$  с центром в начале координат. Переменный радиус пересекает внутреннюю из них в точке  $A$ , внешнюю — в  $B$ . Из  $A$  проводим прямую параллельно оси  $Ox$ , из  $B$  — параллельно оси  $Oy$  до взаимного пересечения этих прямых в точке  $M$ . Найти геометрическое место точки  $M$ .

122. Из начала координат проводится прямая, составляющая угол  $\frac{\pi\theta}{2}$  с осью  $Oy$ . Эта прямая в точке  $M$  пересекается прямой  $x = a\theta$ . Найти уравнение геометрического места точки  $M$ . (Квадратриса Динострата.)

123. Из начала координат проводятся хорды окружности  $x^2 + y^2 = 2ax$  и продолжаютс до пересечения с прямой  $x = 2a$ . Эти продолжения откладываются на тех же хордах из начала координат. Найти геометрическое место концов передвинутых продолжений. (Циссоида Диоклеса.)

124. Из начала координат проведена произвольная прямая, пересекающая окружность  $x^2 + y^2 = au$  и прямую  $y = a$  в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  проводится прямая параллельно оси  $Ox$ , а из точки  $B$  — параллельно оси  $Oy$ . Найти геометрическое место точки пересечения этих прямых. (Верзьера Марии Аньези.)

125. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная. (Овалы Кассини.)

126. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек равно квадрату половины расстояния между ними. (Лемниската Бернулли.)

127. Найти геометрическое место точек, между расстояниями которых до двух данных точек существует линейная зависимость  $r_1 - ar_2 = b$ . (Овалы Декарта.)

128. Через точку  $(0, -a)$  проводятся прямые, пересекающие ось  $Ox$ . На каждой из них, по обе стороны от точки пересечения с  $Ox$ , откладываются отрезки длиной  $h$ . Найти геометрическое место концов этих отрезков. (Конхоида Никомеда.)

129. Из точки  $A$  на окружности диаметра  $a$  проводятся секущие. На каждой из них по обе стороны от другой точки пересечения с окружностью откладываются отрезки длиной  $b$ . Найти геометрическое место их концов. (Улитка Паскаля.)

130. Нить, намотанная на окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ , разматывается, оставаясь туго натянутой. Найти геометрическое место, описываемое её концом, если начальное положение конца нити было в точке  $(a, 0)$ . (Эвольвента круга.)

131. Круг радиуса  $a$  катится без скольжения по оси  $Ox$ . Найти уравнение кривой, описанной той точкой круга, которая в начальный момент касалась оси  $Ox$  в начале координат. (Циклоида.)

132. Найти уравнение кривой, описанной точкой круга радиуса  $a$ , катящегося без скольжения по оси  $Ox$ , если в тот момент, когда круг касался оси  $Ox$  в начале координат, эта точка занимала положение  $(0, a - b)$ . (Трохоида.)

133. Круг радиуса  $a$  катится без скольжения по кругу  $x^2 + y^2 = a^2 n^2$ . Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси  $Ox$ . (Эпициклоида.)

134. Круг радиуса  $a$  катится по кругу  $x^2 + y^2 = a^2 n^2$  внутри его без скольжения. Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси  $Ox$ . (Гипоциклоида.)

135. Показать, что при  $n = 4$  гипоциклоида обращается в астроиду  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

136. При  $n = 1$  эпициклоида обращается в кривую, называемую кардиоидой. Показать, что уравнение кардиоты в соответствующих выбранных полярных координатах имеет вид:  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .

137. Показать, что кардиоида (см. предыдущую задачу) есть частный случай улитки Паскаля.

138. Показать, что при  $n = 2$  гипоциклоида обращается в прямую. (Теорема Кардана.)

139. Прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  скользит концами их по осям координат. Найти геометрическое место вершины прямого угла.

140. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что одна из их сторон лежит на основании треугольника.

141. Найти геометрическое место центров параллелограмов, вписанных в данный четырёхугольник, стороны которых параллельны диагоналям четырёхугольника.

142. Концы основания треугольника — в точках  $(\pm a, 0)$ . Один из углов при основании вдвое больше другого. Найти геометрическое место вершины треугольника.

143. Концы основания треугольника — в точках  $(\pm a, 0)$ . Разность углов при основании равна  $\varphi$ . Найти геометрическое место вершины.

144. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, образуемых прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\frac{x}{k} + \frac{y}{3-k} = 1$ ,  $0 < k < 3$ .

145. Три вершины параллелограмма, направления сторон которого даны, скользят по трём данным прямым. Каково геометрическое место четвёртой вершины?

146. Четыре стороны изменяющегося параллелограмма, всё время проходят через четыре данные точки на прямой. Показать, что диагонали параллелограмма тоже проходят через некоторые неподвижные точки.

147. Стороны прямого угла, положение которого меняется, проходят всё время через две данные точки. Доказать, что также биссектриса его проходит через постоянную точку.

148. Сторона переменного квадрата проходит через начало координат, а концы её скользят по прямым, параллельным оси  $Ox$ . Каково геометрическое место двух других вершин?

149. Найти геометрическое место середин хорд круга  $x^2 + y^2 = a^2$ , проходящих через точку  $P(c, 0)$  внутри круга.

150. Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  вращаются около точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , лежащих на одной прямой. При этом точка пересечения прямых  $a$  и  $b$  скользит по прямой  $P$ , а точка пересечения прямых  $a$  и  $c$  скользит по прямой  $Q$ . Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых  $b$  и  $c$  скользит по прямой  $R$ , проходящей через точку пересечения прямых  $P$  и  $Q$ .

151. Доказать теорему Дезарга: если вершины двух треугольников лежат на трёх прямых, исходящих из одной точки, то три точки пересечения соответствующих пар сторон треугольников лежат на одной прямой.

#### § 4. Кривые 2-го порядка в простейшем виде

152. Ординаты окружности  $x^2 + y^2 = 36$  уменьшены в два раза. Найти уравнение полученной кривой.

153. Найти полуоси эллипса  $3x^2 + 5y^2 - 30 = 0$ .

154. Найти уравнение эллипса, проходящего через точки  $(1, 4)$  и  $(7, 2)$  и симметричного относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

155. Найти уравнение параболы, проходящей через точку  $(6, 9)$ , с вершиной в начале и симметричной относительно оси  $Oy$ .

156. Ось  $Ox$  — ось симметрии параболы с вершиной в начале. Найти уравнение этой параболы, зная, что она проходит через точку  $(2, 2)$ .

157. Доказать, что эллипсы с одинаковым эксцентриситетом  $e$  геометрически подобны, т. е. могут быть совмещены друг с другом при соответствующем увеличении одного из них.



158. Доказать, что все параболы  $y^2 = 2px$  геометрически подобны.

159. Меридиан земного шара — эллипс, у которого сжатие, т. е.  $\frac{a-b}{a}$  равно  $\frac{1}{300}$ . Найти его эксцентриситет.

160. Орбита земного шара — эллипс с полуосью  $a = 150 \cdot 10^6$  км и эксцентриситетом  $e = 0,017$ . Зная, что солнце в фокусе этого эллипса, найти, на сколько кратчайшее расстояние земли до солнца (в декабре) короче длиннейшего (в июне).

161. Параболическое зеркало рефлектора телескопа в Симеизе имело фокусное расстояние 5,4 м и 1,02 м в диаметре. Найти глубину параболической вогнутости зеркала.

162. Зеркало автомобильного фонаря имеет в разрезе форму параболы. Диаметр зеркала 20 см, глубина 10 см. Найти положение фокуса зеркала.

163. Найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

164. Директрисы гиперболы делят расстояние между фокусами на три равные части. Найти её эксцентриситет.

165. Фокусы эллипса делят расстояние между директрисами на три равные части. Найти его эксцентриситет.

166. Каким станет уравнение равнобочной гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$ , если повернуть оси на угол  $\alpha = -45^\circ$ ?

167. Расстояние между фокусами эллипса равно 2, расстояние между директрисами 10. Найти полуоси.

168. Эксцентриситет гиперболы равен 2. Найти угол между асимптотами.

169. Малая ось эллипса видна из фокуса под прямым углом. Найти эксцентриситет.

170. Дана гипербола  $x^2 - y^2 = 8$ . Найти софокусный эллипс, проходящий через точку (4, 6).

171. Дан эллипс  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

172. Найти общее уравнение эллипсов и гипербол с фокусами в точках  $(\pm c, 0)$ .

173. Найти расстояние фокуса гиперболы  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  от асимптоты.

174. Полярное уравнение линии второго порядка есть  $r(5 + 3 \cos \varphi) = 16$ . Найти её уравнение относительно осей симметрии.

175. То же для кривой  $r(4 + 5 \cos \varphi) = 9$ .

176. Доказать равенство

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} = \frac{n}{p},$$

где  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  — радиусы-векторы, проведённые из фокуса под углами  $\frac{2\pi}{n}$  друг к другу

177. Доказать равенство:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — взаимно перпендикулярные радиусы-векторы, проведённые из центра эллипса.

178. Доказать равенство:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_n^2} = \frac{n}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — радиусы-векторы из центра эллипса, составляющие между собой углы  $\frac{2\pi}{n}$ .

179. Найти уравнения диаметров эллипса  $x^2 + 6y^2 = 2$ , длина которых равна 2.

180. Доказать, что эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  есть проекция круга с радиусом  $a$ , лежащего на плоскости, которая образует с плоскостью  $xOy$  угол  $\varphi$ , где  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ .

181. Доказать, что при указанной проекции взаимно перпендикулярные диаметры круга переходят в сопряжённые диаметры эллипса.

182. Пользуясь теоремой о том, что площадь проекции равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, доказать теорему Аполлония:

$$a_1 b_1 \sin \omega = ab,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — длины сопряжённых полуэллипсов, а  $\omega$  угол между ними.

183. Исходя из результатов задач 180 и 181, доказать другую теорему Аполлония, в силу которой

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2.$$

184. Обозначая через  $m$  и  $m_1$  угловые коэффициенты сопряжённых диаметров, доказать, что для эллипса  $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ , а для гиперболы  $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$ .

185. Найти угол между равными сопряжёнными диаметрами эллипса  $x^2 + 3y^2 = 6$ .

186. Найти сопряжённые диаметры гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$ , угол между которыми равен  $45^\circ$ .

187. Найти сопряжённые диаметры эллипса  $x^2 + 15y^2 = 5$ , угол между которыми равен  $150^\circ$ .

188. Угол между сопряжёнными диаметрами эллипса равен  $120^\circ$ . Один из них вдвое больше другого. Найти эксцентриситет.

189. Длины сопряжённых диаметров эллипса  $8x^2 + 17y^2 = 136$  относятся как 4:3. Найти уравнения этих диаметров.

190. Сумма длин сопряжённых диаметров 6, угол между ними  $150^\circ$ , а эксцентриситет  $e = \frac{3}{5}$ . Найти оси эллипса.

191. Найти длины сопряжённых диаметров эллипса  $3x^2 + 5y^2 = 15$ , составляющих наибольший угол.

192. Найти угол между сопряжёнными диаметрами гиперболы, зная отношение их длин  $m$  и эксцентриситет  $e$ .

193. Найти угол между асимптотами гиперболы, зная, что сопряжённые диаметры её образуют угол  $45^\circ$  и относятся как 2 к 3.

194. Найти длины сопряжённых диаметров гиперболы  $9x^2 - 16y^2 = -144$ , сумма которых относится к сумме осей, как 5 к 2.

195. Доказать, что уравнение  $Axx_1 + Byy_1 + C = 0$  изображает касательную к кривой  $Ax^2 + By^2 + C = 0$  в точке  $(x_1, y_1)$ .

196. Доказать, что уравнение  $yy_1 = p(x + x_1)$  изображает касательную к параболе  $y^2 = 2px$  в точке  $(x_1, y_1)$ .

197. Доказать, что касательная к эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , имеющая угловой коэффициент  $m$ , изображается уравнением

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

198. Доказать, что касательная к гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sigma$ , имеющая угловой коэффициент  $m$ , изображается уравнением

$$y = mx \pm \sqrt{\sigma (a^2 m^2 - b^2)}.$$

199. Доказать, что касательная к параболе  $y^2 = 2px$ , имеющая угловой коэффициент  $m$ , изображается уравнением

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

200. Найти касательную к параболе  $4y = x^2$  в точке  $(2, 1)$ .

201. Через точку  $(0, -4)$  провести касательную к параболе  $4y = x^2$ .

202. Через точку  $(-4, -1)$  провести касательную к параболе  $y^2 = 2x$ .

203. Через точку  $(2, -1)$  провести касательную к эллипсу  $x^2 + 9y^2 = 9$ .

204. Через точку  $(3, -6)$  провести касательную к гиперболе  $4x^2 - 9y^2 = 36$ .

205. Через точку  $(1, -2)$  провести касательную к гиперболе  $x^2 - y^2 = 1$ .

206. Провести параллельно прямой  $2x - 3y = 0$  касательные к эллипсу  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

207. Параллельно прямой  $10x + 3y = 0$  провести касательные к гиперболе  $4x^2 - y^2 = 4$ .

**208.** Доказать, что хорды, соединяющие точки пересечения окружности  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  с осями координат, касаются эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**209.** Показать, что эллипсы  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  касаются прямых  $\pm x \pm \pm y = c$ , если  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**210.** Найти геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

**211.** Доказать, что геометрическое место точек, из которых эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  виден под прямым углом, есть окружность  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ .

**212.** Найти расстояние от фокуса параболы  $y^2 = 2px$  до касательной к ней, угол которой с осью равен  $\alpha$ .

**213.** Показать, что у гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  произведение расстояний фокусов от касательной равно  $b^2$ .

**214.** Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней.

### § 5. Кривые 2-го порядка, заданные уравнением в общем виде

**215.** Определить вид линий, заданных уравнениями 2-го порядка:

- a)  $xy = 0$ ;
- b)  $x^2 - y^2 = 0$ ;
- c)  $(x - y)^2 = 0$ ;
- d)  $(x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0$ ;
- e)  $x^2 + y^2 = 0$ ;
- f)  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .

**216.** Определить вид линий, заданных уравнениями 2-го порядка:

- a)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ ;
- b)  $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ ;
- c)  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ .

**217.** Определить  $k$  так, чтобы уравнение

$$x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + k = 0$$

изображало пару пересекающихся прямых.

**218.** Определить  $k$  так, чтобы уравнение

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + k = 0$$

изображало точку.

219. Подобрать  $\lambda$  так, чтобы уравнение

$$x^2 + 2\lambda xy + 4y^2 + 2x - \lambda y = 0$$

изображало пару прямых, и найти их.

220. В уравнении

$$2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$$

подобрать коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы уравнение изображало пару параллельных прямых.

221. Найти уравнения асимптот кривой

$$2x^2 - xy + 3x - y - 1 = 0.$$

222. Показать, что уравнение

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda = 0,$$

где  $\lambda \neq 0$  и  $ab_1 - a_1b \neq 0$ , изображает гиперболу с асимптотами

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

223. Найти уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые  $x - 1 = 0$  и  $y - 1 = 0$  и проходящей через точку  $(2, 2)$ .

224. Доказать, что при любом значении коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$  кривая  $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$  проходит через точки пересечения кривых  $f_1 = 0$  и  $f_2 = 0$ . Здесь  $f_1$  и  $f_2$  — полиномы относительно  $x$  и  $y$ .

225. Пусть  $s_{kl} = 0$  — уравнение прямой  $A_{kl}x + B_{kl}y + C_{kl} = 0$ , проходящей через точки  $k$  и  $l$ . Доказать, что при любых  $\lambda$  и  $\mu$  уравнение

$$\lambda s_{12}s_{34} + \mu s_{13}s_{24} = 0$$

изображает линию 2-го порядка, проходящую через четыре данные точки.

226. Найти уравнение линии 2-го порядка, проходящей через точки  $(1, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(3, 0)$ .

227. Найти линию 2-го порядка по пяти её точкам:  $(3, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-7, 1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

228. Найти параболу, проходящую через четыре точки:  $(0, -1)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ .

229. Найти линию 2-го порядка, проходящую через точку  $(1, 1)$  и точки пересечения кривой  $x^2 - 2xy + 2x - 2y - 17 = 0$  с прямыми  $y = 0$  и  $x + 2y + 3 = 0$ .

230. Через начало координат проведены хорды  $AB$  и  $CD$  окружности  $x^2 + (y - h)^2 = a^2$ . Рассматривая пучок кривых 2-го порядка, проходящих через концы хорд, доказать, что прямые  $AD$  и  $CB$ , а также  $BD$  и  $AC$  пересекают ось  $Ox$  на одинаковых расстояниях от начала.

231. На кривой 2-го порядка взяты шесть точек: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Уравнения сторон полученного шестиугольника соответственно обозначены следующим образом:

$$s_{12} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{34} = 0, \quad s_{45} = 0, \quad s_{56} = 0, \quad s_{61} = 0.$$

При этих условиях и при любом выборе коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$  кривая 3-го порядка

$$\lambda s_{12}s_{34}s_{56} + \mu s_{23}s_{45}s_{61} = 0$$

проходит через 6 данных точек и через 3 точки пересечения пар противоположных сторон.

Исходя отсюда, доказать теорему Паскаля: в шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, три точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

## § 6. Центр, диаметры и упрощение уравнений 2-го порядка

Полином  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ , дополненный до однородного введенным степеней буквы  $z$ , обращается в триничную квадратичную форму

$$f = f(x, y, z) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2.$$

Частные производные его по  $x$ ,  $y$  и  $z$  выражаются равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + By + Dz; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Bx + 2Cy + Ez; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Dx + Ey + 2Fz.$$

Значения их при  $z = 1$  обозначим через  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$  и  $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$ . Определитель из коэффициентов при  $x$ ,  $y$  и  $z$  в формулах, выражающих частные производные, называется дискриминантом  $\Delta$  квадратичной формы трёх переменных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

Его минор  $\delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$  есть дискриминант квадратичной формы двух переменных  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ . В теории квадратичных форм важно тождество, которое можно назвать формулой Тейлора:

$$f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta + f(\xi, \eta, \zeta).$$

Из этой формулы при  $\xi = x$ ,  $\eta = y$ ,  $\zeta = z$  получается тождество Эйлера:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2f(x, y, z).$$

Другое следствие той же формулы выражается равенством:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta = \frac{\partial f}{\partial \xi} x + \frac{\partial f}{\partial \eta} y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} z.$$

В дальнейшем для краткости будем писать:

$$f(x, y, 1) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, \\ f(x, y, 0) = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

232. Пусть  $(x, y)$  — середина хорды кривой  $f(x, y, 1) = 0$ , а  $(x + \xi t, y + \eta t)$  и  $(x - \xi t, y - \eta t)$  — концы хорды. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \eta = 0.$$

**233.** Доказать, что середины хорд кривой  $f(x, y, 1) = 0$ , параллельных прямой  $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta}$ , лежат на прямой  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \eta = 0$  или, в полном виде:

$$(2Ax + By + D)\xi + (Bx + 2Cy + E)\eta = 0$$

(диаметр, сопряжённый с данным направлением).

**234.** Показать, что при переносе начала координат в точку  $(\xi, \eta)$  уравнение  $f(x, y, 1) = 0$  переходит в уравнение

$$f(x_1, y_1, 0) + \frac{\partial f}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta} y_1 + f(\xi, \eta, 1) = 0.$$

**235.** При  $4AC - B^2 \neq 0$  все диаметры проходят через точку  $(\xi, \eta)$ , где пересекаются прямые  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 0$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0$ . Показать, что при переносе начала в точку, выбранную таким образом, уравнение  $f(x, y, 1) = 0$  переходит в такое:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 = \frac{1}{2}(D\xi + E\eta + 2F).$$

Здесь  $D\xi + E\eta + 2F$  есть значение  $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$  при  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ .

**236.** Перенести начало координат в центр кривой  $x^2 + xy + 2x + y - 2 = 0$  и составить новое уравнение кривой.

**237.** Упростить уравнение кривой

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0,$$

перенеся начало координат в центр.

**238.** Упростить уравнение линии

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 3 = 0,$$

перенеся начало координат в тот её центр, абсцисса которого равна единице.

**239.** Показать, что при повороте осей координат на угол  $\alpha$  трёхчлен  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$  переходит в  $A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2$ , где  $A_1 + C_1 = A + C$ ,  $A_1 - C_1 = B \sin 2\alpha + (A - C) \cos 2\alpha$ ;  $B_1 = B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha$ .

**240.** Показать, что при повороте осей на угол  $\alpha$ , где  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C}$ , уравнение  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  переходит в уравнение вида  $A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0$ .

**241.** Упростить уравнение кривой  $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$ , перенеся начало в центр, а затем повернув оси на соответствующий угол.

**242.** То же для кривой

$$x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0.$$

**243. Упростить уравнение параболы**

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

повернув оси так, чтобы новое уравнение не содержало  $x_1y_1$ , и перенеся затем начало так, чтобы в окончательном уравнении осталось лишь два члена.

**244.** Доказать, что при  $4AC - B^2 = 0$ ,  $A > 0$  (так что можно положить  $A = a^2$ ) имеет место тождество:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = (ax + by + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

где  $\alpha = D - 2ah$ ,  $\beta = E - 2bh$ ,  $\gamma = F - h^2$ .

**245.** Доказать, что в тождестве предыдущей задачи число  $h$  можно выбрать так, чтобы прямые  $ax + by + h = 0$  и  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  были взаимно перпендикулярны, если только числа  $D$  и  $E$  не пропорциональны числам  $a$  и  $b$ .

**246.** Упростить уравнение кривой

$$x^3 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$$

с помощью тождества:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4x = (x + y + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

подобрав  $h$  так, чтобы прямые  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  и  $x + y + h = 0$  были взаимно перпендикулярны. При этом формулы преобразования координат имеют вид:

$$y_1 = \frac{x + y + h}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

**247.** Тем же способом упростить уравнение параболы

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 170x + 310y - 465 = 0.$$

**248.** Упростить уравнение параболы

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 + 4x - 16y + 8 = 0.$$

**249.** При данных  $A$ ,  $B$  и  $C$  и соответственно подобранном значении  $\lambda$  справедливо тождество:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные или мнимые коэффициенты. Доказать, что такими значениями  $\lambda$  являются корни уравнения

$$4\lambda^2 - 4(A + C)\lambda + 4AC - B^2 = 0.$$

**250.** Уравнение  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  изображает пару прямых, вещественных или мнимых, тогда и только тогда, если дискриминант  $\Delta$  равен нулю. Пользуясь этим, доказать, что при любых преобразованиях координат величина  $\Delta$  не изменяется.

**251.** Пользуясь инвариантностью величин  $A + C$ ,  $4AC - B^2$  и дискриминанта  $\Delta$ , доказать, что при  $4AC - B^2 \neq 0$  уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$



после упрощения приводится к виду:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \frac{\Delta}{B^2 - 4AC}.$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  корни уравнения  $\lambda^2 - 2(A+C)\lambda + 4AC - B^2 = 0$ .

252. Доказать, что уравнение  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  при  $\Delta \neq 0$  можно привести к виду (при  $4AC - B^2 = 0$ )

$$(A+C)x_1^2 = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{2(A+C)}} y_1.$$

Привести к простейшему виду уравнения следующих линий.

253.  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ .

254.  $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ .

255.  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ .

256.  $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y = 319$ .

257.  $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ .

258.  $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$ .

259.  $7x^2 + 24xy + 38x + 24y + 175 = 0$ .

260.  $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ .

261.  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$ .

## § 7. Сопряжённые диаметры. Оси симметрии. Асимптоты

262. Найти уравнение гиперболы, проходящей через точки  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-1, -2)$  и имеющей асимптоту  $x + y - 1 = 0$ .

263. Найти равнобочную гиперболу, зная её асимптоту  $x - y + 1 = 0$  и точки гиперболы  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ .

264. Составить общее уравнение равнобочных гипербол с центром в точке  $(a, b)$ .

265. Парабола проходит через точки  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$ , а прямая  $x + y + 1 = 0$  — её ось. Найти параболу.

266. Точки  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 1)$  — на параболе. Её ось параллельна прямой  $y = x$ . Найти параболу.

267. Парабола касается оси  $Oy$  в начале координат. Прямая  $x + y + 1 = 0$  — касательная к вершине. Найти параболу.

268. Прямая  $x + y + 1 = 0$  — ось кривой 2-го порядка, а точки  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  лежат на кривой. Найти уравнение кривой.

269. Доказать что у кривой

$$A(ax + by + c)^2 + B(ax + \beta y + \gamma)^2 + C = 0$$

прямые  $ax + by + c = 0$  и  $ax + \beta y + \gamma = 0$  — сопряжённые диаметры, если  $a\beta \neq ab$ .

270. Доказать, что у параболы

$$(ax + dy + c)^2 + A(ax + \beta y + \gamma) = 0$$

прямая  $ax + \beta y + \gamma = 0$  — касательная, а  $ax + by + c = 0$  — диаметр, сопряжённый с её направлением. При этом подразумевается, что  $a\beta \neq ab$ .

**271.** Найти линию 2-го порядка, у которой прямые  $x - 2y - 1 = 0$  и  $2x - y + 1 = 0$  — сопряжённые диаметры и на которой лежат точки  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ .

**272.** Парабола проходит через точку  $(0, 0)$ , прямая  $x + y - 1 = 0$  — диаметр параболы, а  $x + 2y - 1 = 0$  — касательная, сопряжённая с ним. Найти параболу.

**273.** Прямая  $x + y + 1 = 0$  — касательная, а  $x - y + 1 = 0$  — сопряжённый с ней диаметр параболы с параметром  $\sqrt{2}$ . Найти параболу.

**274.** Прямые  $x + y - 1 = 0$  и  $x - y + 1 = 0$  — сопряжённые диаметры эллипса с полуосями 2 и 1. Найти эллипс.

**275.** Прямые  $x + 2y - 4 = 0$  и  $x - 3y + 2 = 0$  — сопряжённые диаметры эллипса с полуосями  $\sqrt{2}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Найти уравнение эллипса.

**276.** Доказать, что отрезки любой прямой, заключённые между гиперболой и её асимптотами, равны между собой.

## § 8. Фокусы и директрисы

**277.** Найти фокус и директрису параболы

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0.$$

**278.** Найти фокусы и директрисы кривой

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0.$$

**279.** Найти фокусы и директрисы кривой

$$8x^3 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0.$$

**280.** Кривая 2-го порядка проходит через начало координат, её фокус — в точке  $(-1, 1)$ , а соответствующая директриса имеет уравнение  $x + y - 2 = 0$ . Найти кривую.

**281.** Найти эллипс, проходящий через точку  $(4, 2)$  и имеющий фокусы в точках  $(4, 3)$  и  $(0, -1)$ .

**282.** Найти эллипс с фокусами в точках  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ , проходящий через точку  $(5, 5)$ .

**283.** Найти равнобочную гиперболу по директрисе  $x + y - 1 = 0$  и фокусу  $(1, 1)$ .

**284.** Найти параболу по её точкам  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  и директрисе  $x + y - 1 = 0$ .

**285.** Кривая 2-го порядка проходит через точку  $(0, -1)$ , имеет центром  $(1, 1)$ , а директрисой прямую  $x + 2y + 1 = 0$ . Найти кривую.

**286.** Найти кривую по её точкам  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 2)$  и фокусу  $(1, 1)$ .

**287.** Найти кривую по директрисе  $x + y + 1 = 0$ , оси  $y = x$  и точкам  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ .

**288.** Найти кривую по точкам  $(4, 5)$ ,  $(-3, 4)$ , фокусу  $(1, 1)$  и оси симметрии  $x + y - 2 = 0$ .

**289.** Найти параболу по её вершине  $(0, 0)$  и фокусу  $(1, 1)$ .

**290.** Найти гиперболу по асимптотам  $x + y - 1 = 0$ ,  $x - y + 1 = 0$  и фокусу  $(0, 2)$ .

**291.** Найти геометрическое место фокусов парабол, проходящих через точку  $(1, -1)$  и имеющих директрисой прямую  $x + y + 1 = 0$ .

**292.** Найти геометрическое место вершин парабол, проходящих через данную точку и имеющих данную директрису.

**293.** Найти геометрическое место центров равнобоких гипербол, проходящих через точку  $(0, 0)$  и имеющих директрисой прямую  $x + y + 1 = 0$ .

**294.** Каково геометрическое место фокусов кривых второго порядка, вписанных в данный параллелограмм?

## § 9. Касательные к кривым 2-го порядка.

### Полюсы и поляры

Если точка  $(x_1, y_1)$  лежит на кривой 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

то уравнение касательной к кривой в этой точке можно написать в любой из двух форм:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + F)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0,$$

$$(2Ax + By + D)x_1 + (Bx + 2Cy + F)y_1 + Dx + Ey + 2F = 0.$$

Если же точка  $(x_1, y_1)$  не лежит на кривой, то те же уравнения изображают некоторую прямую, называемую полярй точки  $(x_1, y_1)$ . Сама точка  $(x_1, y_1)$  называется полюсом этой полярй.

**295.** Найти уравнение касательной в начале координат к кривой  $5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = 0$ .

**296.** Найти касательную к кривой  $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ , параллельную прямой  $2x + 2y - 1 = 0$ .

**297.** Найти уравнения касательных к эллипсу  $x^2 + xy + y^2 = 3$ , параллельных осям координат.

**298.** Найти уравнение касательной к кривой  $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$ , проходящей через точку  $(2, 1)$ .

**299.** Через точку  $(4, -2)$  провести касательную к кривой  $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ .

**300.** Доказать теорему: если полюс движется по прямой, то полярй вращается вокруг некоторой точки.

**301.** Доказать теорему: если полярй точки  $M$  проходит через точку  $N$ , то полярй точки  $N$  проходит через точку  $M$ .

**302.** Доказать теорему Бриансона: диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около кривой 2-го порядка, пересекаются в одной точке.

**303.** Доказать, что кривая 2-го порядка определяется своими пятью касательными.

**304.** Доказать, что полюсы касательных к некоторой кривой 2-го порядка, взятые относительно данной кривой 2-го порядка, лежат на кривой 2-го порядка.

**305.** Найти геометрическое место полюсов касательных к окружности радиуса  $R$  относительно концентрической окружности радиуса  $r$ .

**306.** Если одна из сторон обращается в нуль, то шестиугольник обращается в пятиугольник. Во что переходят при этом теоремы Паскаля (зад. 231) и Брианшона (зад. 302)?

**307.** Такой же вопрос для дальнейших случаев вырождения, когда шестиугольник переходит в четырёхугольник или треугольник.

## § 10. Разные задачи

**308.** Доказать, что площадь, заключённая между касательной к гиперболе и её асимптотами, имеет постоянную величину.

**309.** Доказать, что произведение отрезков секущей между асимптотами и точкой на гиперболе равно квадрату полудиаметра, параллельного секущей.

**310.** Доказать, что у гиперболы точка касания делит пополам отрезок касательной между асимптотами.

**311.** Найти уравнение гиперболы по её фокусу  $(0, 0)$  и трём касательным:  $x - y - 1 = 0$ ,  $2x - y - 1 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ .

**312.** Найти параболу по точке на ней  $(5, 0)$ , фокусу  $(3, 2)$  и касательной  $x - 3y - 7 = 0$ .

**313.** Найти гиперболу по её центру  $(1, 1)$ , фокусу  $(3, 3)$  и касательной  $x + 2y - 7 = 0$ .

**314.** Найти геометрическое место точек касания касательных, проведённых из начала координат к параболе  $[(x - a)^2 + y^2 - b^2](1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0$ , где  $m$  — переменный параметр.

**315.** Найти геометрическое место проекций фокуса на касательные к кривой  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**316.** Найти точку пересечения поляр точек, расположенных на директрисе.

**317.** Если  $a$  и  $b$  — длины двух взаимно перпендикулярных касательных к параболе  $y^2 = 4x$ , то  $a^4 b^4 = (a^2 + b^2)^3$ . Доказать.

**318.** Найти геометрическое место точек касания для касательных данного направления к софокусным кривым  $\frac{x^2}{a^2 + h} + \frac{y^2}{b^2 + h} = 1$ ,  $h$  — переменный параметр.

**319.** Равнобочная гипербола проходит через начало координат и имеет асимптоту  $x + y + 1 = 0$ . Найти геометрическое место точек пересечения второй асимптоты с касательной в начале координат.

**320.** Равнобочные гиперболы проходят через точку  $(1, 0)$  и касаются оси  $Oy$  в точке  $(0, 1)$ . Найти геометрическое место центров.

**321.** Каково геометрическое место вершин равнобочных гипербол, проходящих через данную точку и имеющих данную асимптоту?

**322.** Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к данной параболы две нормали, составляющие между собой прямой угол?

**323.** Даны параболы  $y^2 = 2px$  и  $y^2 = 2p(x - a)$ . Доказать, что хорды первой, касающиеся второй, делятся пополам точкой касания.

**324.** Две параболы имеют общую ось симметрии. Две прямые параллельны оси симметрии. Через точки их пересечения с параболой проводятся хорды. Доказать, что точки пересечения этих хорд лежат на одной прямой.

**325.** Каково геометрическое место вершин парабол с данными фокусом и касательной?

**326.** Доказать, что круг, описанный около треугольника, составленного из трёх касательных к параболы, проходит через фокус.

**327.** Доказать, что равнобочная гипербола, описанная около треугольника, проходит через точку пересечения его высот.

**328.** Каково геометрическое место фокусов парабол с данными вершиной и касательной?

**329.** Из точки вне параболы можно провести три нормали к ней. Доказать, что вершина параболы и три основания нормалей лежат на одной окружности.

**330.** Даны кривая  $Ax^2 + By^2 + C = 0$  и точка  $M(a, b)$ . Около точки  $M$ , как центра, описываются окружности. Найти геометрическое место середин хорд, общих этим окружностям и данной кривой.

**331.** Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Каково геометрическое место таких точек  $M$ , что сумма площадей треугольников  $AMB$  и  $CMD$  равна сумме площадей треугольников  $BMC$  и  $DMA$ ?

**332.** С помощью результата предыдущей задачи доказать теорему Ньютона: в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанного круга лежат на одной прямой.

**333.** Прямой угол, вершина которого  $M$  находится на кривой 2-го порядка, вращается около вершины, а  $A$  и  $B$  — точки пересечения его сторон с кривой, отличные от  $M$ .

Доказать, что прямая  $AB$  вращается около точки, расположенной на нормали к кривой в точке  $M$ .

**334.** Около точки  $A$  внутри данного круга вращается прямой угол. В точках пересечения его сторон с окружностью проводятся касательные к кругу. Найти геометрическое место точек пересечения этих касательных.

**335.** Переменный круг касается эллипса в данной точке. Каково геометрическое место точек пересечения общих касательных?

**336.** Фокусы эллипса соединяются радиусами-векторами с переменной точкой эллипса. Каково геометрическое место центров кругов, вписанных в треугольники, составленные из фокальной прямой и радиусов-векторов?

**337.** Инверсия, или преобразование обратными радиусами-векторами, состоит в том, что переменную точку  $M$  заменяют другой точкой  $M_1$ , лежащей на прямой  $OM$  так, что  $OM \cdot OM_1 = a^2$ . Здесь  $O$  — данная точка,  $a$  — данная величина. Доказать, что при инверсии линия  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  переходит в линию  $A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + D_1 = 0$ , т. е. круги или прямые переходят в круги или прямые (не обязательно соответственно).

**338.** Доказать, что инверсией относительно начала координат гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$  переводится в лемнискату Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 (x^2 - y^2).$$

**339.** Доказать, что инверсия эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  относительно начала с радиусом инверсии, равным  $\sqrt{ab}$ , дает кривую

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2.$$

**340.** Гипербола, конгруэнтная гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a > b$ , вписана в угол между осями координат и скользит по ним. Доказать, что её центр движется по окружности

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

**340а.** Эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  касается осей координат и скользит по ним. Доказать, что его центр движется по окружности

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

---

## ОТДЕЛ II

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

---

### § 1. Векторы и координаты в пространстве

**341.** Проекция вектора на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  равны 1,  $-4$ , 8. Найти длину вектора и косинусы его углов с осями.

**342.** Даны проекции векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  на оси координат:  $a_x = 5$ ,  $a_y = 7$ ,  $a_z = 8$ ,  $b_x = 3$ ,  $b_y = -4$ ,  $b_z = 6$ ,  $c_x = -6$ ,  $c_y = -9$ ,  $c_z = -5$ . Найти длину геометрической суммы этих векторов.

**343.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — косинусы углов вектора с осями.

**344.** Рассматривая сторону многоугольника, как замкнутую, с помощью скалярного возвышения в квадрат равенства

$$\vec{a} + \vec{b} + \dots + \vec{l} = \vec{m}$$

доказать теорему: квадрат стороны многоугольника равен сумме квадратов остальных сторон плюс сумма удвоенных произведений каждой двух из них на косинус угла между ними.

**345.** Доказать теорему: квадрат площади грани многоугольника равен сумме квадратов площадей остальных граней плюс удвоенная сумма произведений их попарно на косинус угла между ними. При этом углом между гранями считается угол между векторами, перпендикулярными к граням и направленными в наружную сторону.

**346.** Найти расстояние между точками  $(2, 4, 6)$  и  $(-1, 8, -6)$ .

**347.** Найти угол между биссектрисами углов  $xOy$  и  $xOz$ .

**348.** Найти объём параллелепипеда, рёбра которого 1, 1, 2, а плоские углы при трёхгранном угле равны  $120^\circ$ ,  $150^\circ$  и  $60^\circ$ .

**349.** Найти объём параллелепипеда, рёбра которого 1, 2, 4, а плоские углы при вершине равны  $60^\circ$ .

**350.** Найти равнодействующую сил, равных 1, 1 и 2, приложенных к вершине  $O$  и направленных по рёбрам  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  правильного тетраэдра.

**351.** По рёбрам  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  правильного тетраэдра направлены силы, величины которых 1, 2 и 3. Найти величину равнодействующей и косинусы её углов с рёбрами.

**352.** Найти острый угол между диагоналями прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого:  $OA = 1$ ,  $OB = 2$ ,  $OC = 2$ .

**353.** Найти угол между противоположными рёбрами правильного тетраэдра.

**354.** Даны четыре точки  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(4, -4, -3)$ ,  $C(2, 4, 3)$ ,  $D(8, 6, 6)$ . Найти проекцию вектора  $AB$  на направление вектора  $CD$ .

**355.** Найти на координатных плоскостях точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, чтобы тетраэдр  $OABC$  был правильным с ребром  $a$ .  $O$  — начало координат.

**356.** Даны точки  $M_1(1, 2, -1)$  и  $M_2(-1, 2, 1)$ . На прямой  $M_1M_2$  найти точку  $M$  так, чтобы  $\frac{M_1M}{MM_2} = 2$ .

**357.** Тот же вопрос, но точка  $M$  ищется на продолжении  $M_1M_2$ .

**358.** Центры тяжести граней тетраэдра — в точках  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(4, -1, 3)$ . Найти вершины тетраэдра.

**359.** Три вершины куба расположены в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(7, 6, -6)$ ,  $A(6, 2, 9)$ . Найти четвертую вершину  $C$  так, чтобы отрезок  $OC$  был ребром куба, а триэдр  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  имел ту же ориентировку, что и триэдр  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

**360.** Рёбра куба  $OA$  и  $OB$  исходят из начала координат. Точки  $A(6, 7, 6)$  и  $B(2, 6, -9)$  даны. Найти объём куба и конец третьего ребра, исходящего из начала.

**361.** Новое начало координат — в точке  $(1, 2, 3)$ . Об углах между новыми и старыми осями известно, что

$$\cos(Ox, O_1x_1) = \frac{1}{3}, \quad \cos(Ox, O_1y_1) = -\frac{2}{3}, \quad \cos(Oy, O_1x_1) = -\frac{2}{3}.$$

Составить формулы перехода, если угол между  $Ox$  и  $O_1x_1$  — острый, а угол между  $Oy$  и  $O_1y_1$  — тупой.

**362.** Из начала координат проведены векторы в точки  $(10, -5, 10)$ ,  $(-11, -2, 10)$ ,  $(-2, -14, -5)$ . Доказать, что они составляют рёбра куба и найти его объём.

**363.** Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 - 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где буквами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  обозначены 9 косинусов углов между старыми и новыми осями.

**364.** Косинусы углов между новыми и прежними осями даны следующей таблицей:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y$	$-\frac{11}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{10}{15}$
$z$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{14}{15}$	$-\frac{1}{3}$



Доказать, что у точек, для которых  $x : y : z = 4 : -2 : 1$ , новые координаты равны прежним.

365. Три ребра тетраэдра идут из точки  $O(0, 0, 0)$  в точки  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(1, 2, 2)$  и  $C(3, -1, 4)$ . Найти объём тетраэдра.

366. Найти объём тетраэдра по его вершинам  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(1, -1, 1)$ ,  $D(1, 1, -1)$ .

367. Найти площадь треугольника, вершины которого  $M_1(1, -1, 1)$ ,  $M_2(2, 1, -1)$  и  $M_3(-1, -1, -2)$ .

368. Найти площадь треугольника по его вершинам  $(5, 2, 14)$ ,  $(4, 7, 22)$ ,  $(0, 0, 0)$ .

369. Найти площадь треугольника по его вершинам  $(2, 3, -6)$ ,  $(6, 4, 4)$ ,  $(3, 7, 4)$ .

## § 2. Плоскость

370. Найти плоскость, образующую на осях координат отрезки  $2, -3, 4$ .

371. Найти отрезки на осях, образуемые плоскостью  $x + 2y - 3z + 6 = 0$ .

372. Найти плоскость, проходящую через точку  $(2, 1, -1)$  и образующую на осях  $Ox$  и  $Oz$  отрезки, равные соответственно 2 и 1.

373. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 1)$  и  $(3, -2, 3)$ .

374. Найти уравнения граней тетраэдра с вершинами в точках  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ .

375. Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости  $x - 2y + z - 1 = 0$  с осями координат.

376. Найти косинусы углов, образованных плоскостью

$$2x - 2y + z - 5 = 0$$

с координатными плоскостями.

377. Найти синусы углов, образованных плоскостью  $6x - 2y - 3z - 6 = 0$  с осями координат.

378. Найти двугранный угол между плоскостями

$$2x + y - 2z - 4 = 0 \text{ и } 3x + 6y - 2z - 12 = 0.$$

379. Найти линейный угол того двугранного угла между плоскостями  $x - y + z - 1 = 0$  и  $2x - y + z + 2 = 0$ , в котором лежит начало координат.

380. Через точку  $(1, -1, 1)$  провести плоскость, перпендикулярную к плоскостям  $x - y + z - 1 = 0$ ,  $2x + y + z + 1 = 0$ .

381. Через точки  $(1, 1, 1)$  и  $(2, 2, 2)$  провести плоскость, перпендикулярную к плоскости  $x + y - z = 0$ .

382. Лежат ли точки  $(2, 1, 1)$  и  $(2, 1, 3)$  по одну сторону от плоскости  $x + 2y - z - 2 = 0$ ?

383. Найти объём тетраэдра по уравнениям его граней:  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $x - y - 1 = 0$ ,  $x - z - 1 = 0$ ,  $z - 2 = 0$ .

384. Найти геометрическое место точек  $(x, y, z)$  таких, что объём тетраэдра с вершинами  $(x, y, z)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$  равен 10.

385. Найти расстояние точки  $(2, 1, 1)$  от плоскости  $x + y - z + 1 = 0$ .

386. Найти расстояние между параллельными плоскостями  $x - 2y + z - 1 = 0$  и  $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

387. Найти плоскость, равноудалённую от плоскостей  $x + y - 2z - 1 = 0$  и  $x + y - 2z + 3 = 0$ .

388. На оси  $Oz$  найти точку, равноудалённую от плоскостей  $12x + 9y - 20z - 19 = 0$  и  $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ .

389. На линии пересечения плоскостей  $x + y + z - 2 = 0$  и  $x + 2y - z - 1 = 0$  найти точку, равноудалённую от плоскостей  $x + 2y + z + 1 = 0$  и  $x + 2y + z - 3 = 0$ .

390. Найти плоскость, делящую пополам тот двугранный угол между плоскостями  $x + 2y - z - 1 = 0$  и  $x + 2y + z + 1 = 0$ , в котором лежит точка  $(1, -1, 1)$ .

391. Найти плоскость, в два раза более удалённую от плоскости  $x + y - z + 1 = 0$ , чем от плоскости  $x + y - z - 1 = 0$ , и не расположенную между ними.

392. Найти плоскость, расположенную между плоскостями  $x - 2y + z - 2 = 0$  и  $x - 2y + z - 6 = 0$  и делящую расстояние между ними в отношении  $1 : 3$ .

393. Найти точку пересечения плоскостей:  $x + y + z - 6 = 0$ ,  $2x - y + z - 3 = 0$ ,  $x + 2y - z - 2 = 0$ .

394. Доказать, что плоскости  $x + y + 2z - 4 = 0$ ,  $x + 2y - z - 2 = 0$ ,  $2x - y - z = 0$ ,  $x + y + z - 3 = 0$  пересекаются в одной точке.

395. Через точку пересечения плоскостей  $2x + y - z - 2 = 0$  и  $x - 3y + z + 1 = 0$ ,  $x + y + z - 3 = 0$  провести плоскость, параллельную плоскости  $x + y + 2z = 0$ , не находя точки пересечения.

396. Проверив, что плоскости  $x - 2y + 2z - 7 = 0$ ,  $2x - y - 2z + 1 = 0$ ,  $2x + 2y + z - 2 = 0$  взаимно перпендикулярны, принять их за новые плоскости координат, приписав новым осям такие направления, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Составить формулы перехода.

397. Найти общий вид плоскостей, пересекающих призму, образованную плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ , по равносоставленному треугольнику.

398. В уравнении  $x + y + \lambda z = 0$  определить  $\lambda$  так, чтобы через  $Ox$  можно было провести только одну плоскость, составляющую угол  $330^\circ$  с плоскостью  $x + y + \lambda z = 0$ .

399. Определить  $\lambda$  так, чтобы плоскости  $x - y + z = 0$ ,  $3x - y - z + 2 = 0$ ,  $4x - y - 2z + \lambda = 0$  пересекались по прямой.

400. Доказать, что плоскости, проходящие через середины рёбер тетраэдра перпендикулярно этим рёбрам, пересекаются в одной точке.

401. Доказать, что плоскости, делящие пополам двугранные углы тетраэдра, пересекаются в одной точке.

402. Через точку  $(1, 4, 1)$  провести плоскость, касающуюся парабол  $y = 0$ ,  $z^2 = 8x$  и  $z = 0$ ,  $y^2 = 32x$ .

**403.** В уравнении плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  все коэффициенты отличны от нуля. Доказать, что плоскость проходит через семь координатных углов.

### § 3. Прямая в пространстве

**404.** Найти плоскости, проектирующие прямую  $x - y + 2z + 3 = 0$ ,  $2x - y - z + 1 = 0$  на плоскости координат.

**405.** Найти углы прямой  $3x - y + 2z = 0$ ,  $6x - 3y + 2z = 2$  с осями координат.

**406.** Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

**407.** Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y + z = 0, \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

**408.** Найти угол между прямой  $x + y + 3z = 0$ ,  $x - y - z = 0$  и плоскостью  $x - y - z + 1 = 0$ .

**409.** Провести прямую через точки  $(1, 2, 1)$  и  $(2, 1, 3)$ .

**410.** Провести прямую через точки  $(1, 2, 1)$  и  $(1, 2, 3)$ .

**411.** Через точку  $(1, 2, 1)$  провести прямую, перпендикулярную плоскости  $x + 2y - z = 0$ .

**412.** Через точку  $(2, 1, 1)$  провести прямую, параллельную плоскостям  $2x - y + 1 = 0$ ,  $y - 1 = 0$ .

**413.** Через точку  $(-1, 2, 1)$  провести прямую, параллельную прямой  $x + y - 2z - 1 = 0$ ,  $x + 2y - z + 1 = 0$ .

**414.** Через точку  $(2, 1, 1)$  провести прямую, параллельную плоскостям  $x - y + z + 2 = 0$ ,  $x + y + 2z - 1 = 0$ .

**415.** Через точку  $(2, 2, 1)$  провести плоскость, перпендикулярную прямой  $x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $2x + y - z = 0$ .

**416.** Через точку  $(1, 1, 2)$  провести плоскость, параллельную прямым

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

**417.** Через точку  $(1, 2, 1)$  провести плоскость, параллельную прямым

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

**418.** Через прямую  $2x - y + z - 1 = 0$ ,  $x + y - z = 0$  и точку  $(2, 1, 1)$  провести плоскость.

**419.** Через прямую  $x - 1 = 0$ ,  $x + 2y - z - 1 = 0$  провести плоскость перпендикулярно к плоскости  $x + y + z = 0$ .

420. Через прямую  $x + y + z = 0$ ,  $2x - y + 3z = 0$  провести плоскость, параллельную прямой  $x = 2y = 3z$ .

421. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости  $z = 0$  и проходящей через перпендикуляр, опущенный из точки  $(1, -1, 1)$  на прямую  $x = 0$ ,  $y - z + 1 = 0$ .

422. Найти уравнение и длину высоты треугольника, отсекаемого на плоскости  $3x - y + 4z - 12 = 0$  координатными плоскостями; высота опущена из вершины, лежащей на  $Oz$ .

423. Найти точку пересечения прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$  с плоскостью  $x + y - z + 1 = 0$ .

424. Найти проекцию точки  $(2, 1, 1)$  на плоскость  $x + y + 3z + 5 = 0$ .

425. Найти проекцию точки  $(2, 3, 1)$  на прямую  $x = t - 7$ ,  $y = 2t - 2$ ,  $z = 3t - 2$ .

426. Найти уравнения проекции прямой  $2x - y + z - 1 = 0$ ,  $x + y - z + 1 = 0$  на плоскость  $x + 2y - z = 0$ .

427. Найти отражение точки  $(-1, 2, 0)$  в плоскости  $x + 2y - z + 1 = 0$ .

428. Определить  $\lambda$  так, чтобы прямые  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$  и  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  пересекались.

429. Найти прямые, перпендикулярные прямой  $y - z + 1 = 0$ ,  $x + 2z = 0$  и лежащие в плоскости  $x + y + z + 1 = 0$ .

430. Через точку пересечения плоскости  $x + y + z = 1$  и прямой  $y = 1$ ,  $z = -1$  провести прямую, лежащую в данной плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

431. Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки  $(0, -1, 1)$  на прямую  $y + 1 = 0$ ,  $x + 2z - 7 = 0$ .

432. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через перпендикуляр, опущенный из точки  $(1, -1, 0)$  на прямую  $x = z + 3$ ,  $y = -2z - 3$ .

433. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x + 4z + 1 = 0, \\ x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

434. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}, \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

435. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0, \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

436. Найти плоскость, в которой лежат прямые  $x = 2t - 1$ ,  $y = 3t + 2$ ,  $z = 2t - 3$  и  $x = 2t + 3$ ,  $y = 3t - 1$ ,  $z = 2t + 1$ .

**437.** Доказать, что расстояние точки  $M(x, y, z)$  до прямой, проходящей через точку  $A(a, b, c)$ , можно выразить формулой  $d = \frac{|\vec{rP}|}{|\vec{P}|}$ ,

где  $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$ , а  $\vec{P}$  — любой вектор, направленный по прямой.

**438.** Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что расстояние  $d$  точки  $M(x_1, y_1, z_1)$  до прямой  $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$  можно выразить формулой

$$d^2 = \frac{[m(x_1-a)-l(y_1-b)]^2 + [n(x_1-a)-l(z_1-c)]^2 + [n(y_1-b)-m(z_1-c)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

**439.** Найти расстояние от точки  $(3, -1, 2)$  до прямой

$$2x - y + z - 4 = 0, \quad x + y - z + 1 = 0.$$

**440.** Доказать, что расстояние между двумя непараллельными прямыми можно выразить формулой

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3)|}{|[\vec{r}_1 \vec{r}_2]|},$$

где  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  — какие-нибудь векторы, расположенные на данных прямых, а  $\vec{r}_3$  — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой.

**441.** Доказать, что длину  $d$  общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$$

можно представить формулой

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a & b_1 - b & c_1 - c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(lm_1 - l_1m)^2 + (mn_1 - m_1n)^2 + (ln_1 - l_1n)^2}}.$$

**442.** Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

**443.** Найти расстояние между прямыми

$$x = y = z \quad \text{и} \quad x - 1 = 0, \quad y - 2 = 0.$$

**444.** Доказать, что расстояние  $h$  между параллельными прямыми можно выразить формулой

$$h = \frac{|[\vec{rP}]|}{|\vec{P}|},$$

где  $\vec{r}$  — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой, а  $\vec{P}$  — вектор, параллельный данным прямым.

**445.** Доказать, что расстояние между прямыми

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l} = \frac{y-b_1}{m} = \frac{z-c_1}{n}$$

можно выразить формулой:

$$h^2 = \frac{[m(a_1-a)-l(b_1-b)]^2 + [n(b_1-b)-m(c_1-c)]^2 + [l(c_1-c)-n(a_1-a)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

**446.** Найти расстояние между параллельными прямыми

$$x = t + 1, \quad y = 2t - 1, \quad z = t \quad \text{и} \quad x = t + 2, \quad y = 2t - 1, \quad z = t + 1.$$

**447.** Если векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  имеют равную длину и лежат на данных пересекающихся прямых, то векторы  $\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2$  параллельны биссектрисам углов между прямыми. Исходя из этого замечания, доказать, что биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a}{l_1} = \frac{y-b}{m_1} = \frac{z-c}{n_1}$$

можно представить уравнениями

$$x = a + \left(\frac{l}{\Delta} \pm \frac{l_1}{\Delta_1}\right)t, \quad y = b + \left(\frac{m}{\Delta} \pm \frac{m_1}{\Delta_1}\right)t, \quad z = c + \left(\frac{n}{\Delta} \pm \frac{n_1}{\Delta_1}\right)t,$$

где

$$\Delta = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}, \quad \Delta_1 = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}.$$

**448.** Найти биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}.$$

**449.** Найти биссектрисы угла между прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{3}.$$

**450.** Найти прямые, пересекающие прямые

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

и параллельные плоскости  $x+y+z=0$ .

**451.** Найти прямые, пересекающие три прямые

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=0, \\ z+1=0. \end{cases}$$

**452.** Доказать, что плоскости, проходящие через рёбра трёхгранного угла и биссектрисы противоположных граней, пересекаются по прямой.

**453.** Три взаимно перпендикулярные прямые неподвижно связаны с твёрдым телом. Сначала они были направлены по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,

$Oz$ , а затем расположились по осям  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ . Косинусы углов между осями даются таблицей

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
$y$	$a_2$	$b_2$	$c_2$
$z$	$a_3$	$b_3$	$c_3$

Доказать, что такое перемещение тела могло быть достигнуто вращением около прямой, и найти эту прямую.

**454.** Координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  переходят в координаты  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  по формулам:

$$\begin{aligned} 9x_1 &= 4x + 7y - 4z, \\ 9y_1 &= x + 4y + 8z, \\ 9z_1 &= 8x - 4y + z. \end{aligned}$$

Затем по таким же формулам координаты  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  переходят в координаты  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ , и т. д. Доказать, что  $x_4 = x$ ,  $y_4 = y$ ,  $z_4 = z$ .

**455.** Координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  переходят в координаты  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  по формулам:

$$\begin{aligned} 9x_1 &= (5 \cos \varphi + 4)x + (-4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi + 4)y + \\ &\quad + (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)z, \\ 9y_1 &= (-4 \cos \varphi - 3 \sin \varphi + 4)x + (5 \cos \varphi + 4)y + \\ &\quad + (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)z, \\ 9z_1 &= (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)x + (-2 \cos \varphi - 6 \sin \varphi + 2)y + \\ &\quad + (8 \cos \varphi + 1)z. \end{aligned}$$

Затем по таким же формулам координаты  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  переходят в координаты  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ , и т. д.

Доказать, что координаты  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  выражаются через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  такими же формулами, как и  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , только угол  $\varphi$  заменяется на  $n\varphi$ .

#### § 4. Образование поверхностей

**456.** Найти геометрическое место точек, удалённых от прямой  $x = y = z$  на расстояние, равное  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**457.** Найти геометрическое место точек, одинаково удалённых от осей  $Ox$  и  $Oy$ .

458. Найти геометрическое место точек, одинаково удалённых от оси  $Ox$  и от прямой  $y=2, z=2$ .

459. Найти уравнение геометрического места прямых, образующих с плоскостью  $xOy$  угол  $45^\circ$  и проходящих через точку  $(1, 0, 0)$ .

460. Прямая скользит по прямым  $x=0, y=0$  и  $x=1, z=0$ , оставаясь параллельной плоскости  $x+y+z=0$ . Найти поверхность, образованную движением этой прямой.

461. Найти уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым  $x=3-z, y=2-2z$  и  $x=-z, y=3z-3$ , оставаясь параллельной плоскости  $2x-3y+z+12=0$ .

462. Прямая скользит по трём прямым:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} y=0, \\ z=1, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ z=1. \end{cases}$$

Найти уравнение образующейся поверхности.

463. Найти поверхность, получающуюся при скольжении прямой по трём данным прямым:

$$x=-2z-2, y=-z; x=-z+1, y=2; x=y=z.$$

464. Найти геометрическое место прямых, проходящих через ось  $Ox$  и параллельных прямой  $x=1, y=z$ .

465. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой  $2x=-2y=z$ , а направляющая задана уравнениями  $x+y-z=0, 4y^2-2z^2+x-8y-8z-2=0$ .

466. Найти геометрическое место перпендикуляров, опущенных из точки  $(0, 0, 1)$  на образующие конической поверхности  $x^2+y^2=z^2$ .

467. Найти уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой  $x=y=z$ , а направляющая — окружность  $x^2+y^2=1, z=0$ .

468. Прямая, параллельная плоскости  $xOy$ , скользит по оси  $Oz$  и по кривой  $x=r \cos az, y=r \sin az$ . Найти уравнение получающейся поверхности.

469. Прямая, параллельная плоскости  $x+y+z=0$ , скользит по оси  $Oz$  и по окружности  $x=b, y^2+z^2=a^2$ . Найти получающуюся поверхность.

470. Найти поверхность, образуемую движением прямой, пересекающей окружность  $z=0, x^2+y^2=1$  и прямые  $x-1=y=z, y=0, x+1=0$ .

471. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой в начале координат, а направляющая задана уравнениями  $z=1, x^2+y^2=x$ .

472. Доказать, что уравнение конической поверхности вращения, у которой оси  $Ox, Oy, Oz$  — образующие, имеет вид:

$$xy+xz+yz=0.$$



473. Найти коническую поверхность, вершина которой в точке  $(1, 1, 1)$ , а направляющая задана уравнениями  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + y + z = 0$ .

474. Круглый диск параллелен плоскости  $YOZ$ . Его центр — в точке  $(1, 0, 2)$ , а радиус равен единице. На оси  $Oz$  расположена светящаяся точка так, что тень от диска на плоскости  $xOy$  имеет вид параболы. Найти уравнение этой параболы.

475. Лампочка висит под центром круглого абажура, на 10 см ниже его и в 50 см от стены. Радиус абажура 15 см. Найти очертание тени на стене.

476. Диск с центром в  $(1, 0, 2)$  и радиусом 1 освещён источником света, расположенным на оси  $Oz$  так, что тень от диска на плоскости  $xOy$  имеет вид равнобочной гиперболы. Найти точку, в которой расположен источник света, если диск параллелен  $YOZ$ .

477. Тот же вопрос, если тень имеет вид гиперболы с углом между асимптотами, тангенс которого равен  $\frac{4}{3}$ .

478. Тот же вопрос для случая тени, имеющей вид эллипса, ось которого, расположенная на оси  $Ox$ , равна  $\frac{8}{3}$ .

479. Куб с центром в начале координат вращается около диагонали длиной  $2a$ , расположенной по оси  $Oz$ . Найти уравнение поверхностей, получаемых при вращении рёбер куба.

480. Ось вращения круглого цилиндра проходит через точку  $(a, b, c)$  и параллельна вектору  $P(l, m, n)$ . Доказать, что уравнение цилиндра имеет вид:

$$[m(x-a) - l(y-b)]^2 + [n(x-a) - l(z-c)]^2 + \\ + [n(y-b) - m(z-c)]^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2).$$

481. Доказать, что три линии: парабола  $x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 2y + 3 = 0$ ,  $z = 0$ , гипербола  $x = 0$ ,  $4y^2 + 4z^2 - 10yz - 2y + 2z + 3 = 0$  и эллипс  $y = 0$ ,  $x^2 + 4z^2 - 6x + 2z + 3 = 0$  получаются при пересечении координатными плоскостями одной и той же конической поверхности с вершиной в точке  $(1, 1, 1)$ .

482. Два шара радиуса  $a$  касаются друг друга и плоскости  $xOy$ . Найти геометрическое место центров шаров, касающихся данных шаров и плоскости  $xOy$ , если центры данных шаров — в точках  $(\pm a, 0, a)$ .

483. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух прямых  $x = a + lt$ ,  $y = b + mt$ ,  $z = c + nt$  и  $x = a_1 + l_1t$ ,  $y = b_1 + m_1t$ ,  $z = c_1 + n_1t$ .

484. Найти уравнение цилиндрической поверхности вращения, имеющей образующими прямые  $x = y = z$ ;  $y = x + 1$ ,  $z = x + 2$ ;  $y = x - 2$ ,  $z = x + 1$ .

485. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся прямых  $y = 0$ ,  $z = a$  и  $x = 0$ ,  $z = -a$ .

## § 5. Поверхности 2-го порядка. Центр и диаметральные плоскости

486. Найти общее уравнение поверхностей второго порядка, пересекаемых плоскостью  $xOy$  по кривой  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$ .

487. Найти поверхность 2-го порядка, на которой лежат окружности  $z=0$ ,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;  $z=1$ ,  $x^2 + y^2 - 3 = 0$ ;  $z=2$ ,  $x^2 + y^2 - 5 = 0$ .

488. Через начало координат провести прямые асимптотического направления для поверхности  $x^2 - 2y^2 - 4xy - 10xz - 4yz - 10 = 0$ , параллельные плоскости  $3x + y - 4z - 3 = 0$ .

489. Показать, что уравнению  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2x + 1 = 0$  удовлетворяют только точки прямой  $x + z = 0$ ,  $y + 1 = 0$ .

490. Показать, что уравнению  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 2y - 2z + 3 = 0$  удовлетворяют координаты лишь одной точки  $(-1, 1, 1)$ .

491. Написать общий вид уравнения второго порядка, которому удовлетворяют только координаты точки  $(2, 1, 1)$ .

492. Составить уравнение 2-го порядка, которому удовлетворяют только координаты точек прямой  $2x + 2 = 3y = 2z$ .

493. Найти уравнение совокупности плоскостей  $x + 2y - z + 1 = 0$  и  $x - y + z + 1 = 0$ .

494. Найти прямые, по которым поверхность конуса  $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$  пересекается с плоскостью  $x + y + 2z + 5 = 0$ .

495. Найти образующие поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , проходящие через точку  $(1, 1, 1)$ .

496. Найти образующую поверхности  $x^2 - y^2 = 2z$ , параллельную плоскости  $x + y + z = 0$ .

497. Найти прямые, параллельные образующим двух поверхностей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

498. Через точки  $(0, -2, 2)$  и  $(-1, 0, 0)$  провести плоскости, пересекающие конус  $x^2 + y^2 = z^2$  по параболам.

499. Через те же точки провести плоскости, пересекающие тот же конус по эллипсам.

500. Преобразовать уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0,$$

перенеся начало координат в центр.

501. То же для поверхности

$$2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$$

502. То же для поверхности  $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$ .

503. Найти геометрическое место центров поверхностей  $x^2 + y^2 - z^2 + \lambda xz + \mu yz - 2x - 2y - 2z = 0$ .

504. Из центра поверхности  $x^2 + 4y^2 - 40z^2 + 4x - 8y - 16z - 12 = 0$  провести прямые асимптотического направления.

505. Найти уравнение гиперboloида, проходящего через точку  $(2, 1, 1)$ , зная асимптотический конус этого гиперboloида  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .

506. Доказать, что геометрическое место центров поверхностей 2-го порядка, проходящих через данный эллипс и через две точки, симметричные относительно плоскости этого эллипса, есть поверхность второго порядка.

507. Обозначая через  $s_{\lambda\mu\nu}$  левую часть уравнения плоскости, проходящей через точки  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ , доказать, что уравнение

$$s_{123}s_{456} + As_{234}s_{561} + Bs_{345}s_{612} + Cs_{124}s_{356} + 0$$

при любом выборе коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  изображает поверхность 2-го порядка, проходящую через шесть данных точек, обозначенных номерами 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Общее уравнение поверхностей 2-го порядка имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

Для более удобного обзора и запоминания ряда пунктов теории поверхностей 2-го порядка следует применять обозначения и сведения из теории квадратичных форм. Полином в левой части уравнения введением переменного  $t$  можно превратить в квадратичную форму четырёх переменных  $\Phi(x, y, z, t)$  или попросту  $\Phi$ , где

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gxt + Hyt + Izt + Kt^2.$$

При  $t = 1$  эта форма обращается в левую часть уравнения поверхности, которое можно записать в таком виде:  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ . При  $t = 0$  форма  $\Phi$  обращается в функцию трёх переменных — тройничную квадратичную форму, которую обозначим через  $f(x, y, z)$  или, ещё короче, через  $f$ . Таким образом,

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz.$$

Обозначая для симметрии  $x, y, z$  и  $t$  через  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и вводя другие обозначения для коэффициентов форм, можем написать ещё:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_3x_4 + \\ & + a_{41}x_4x_1 + a_{42}x_4x_2 + a_{43}x_4x_3 + a_{44}x_4^2. \end{aligned}$$

Таким же образом имеем:

$$\begin{aligned} f = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

При этом положено:

$$A = a_{11}, B = a_{22}, \dots, D = 2a_{12} = 2a_{21}, E = 2a_{13} = 2a_{31}, \dots$$

Частные производные функции  $\Phi$  выражаются формулами:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

При  $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$  правые части обращаются в величины

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

называется дискриминантом формы  $\Phi$ .

Имеет значение тождество, которое можно назвать формулой Тэйлора:

$$\Phi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) = \Phi(x, y, z, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tau + \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau).$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} z + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} t.$$

При этом, например,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{\partial \xi}.$$

Из формулы Тэйлора следует тождество Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t = 2\Phi(x, y, z, t).$$

**508.** Пользуясь формулой Тэйлора, доказать, что при переносе начала координат в точку  $(\xi, \eta, \zeta)$  уравнение поверхности  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$  переходит в такое:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} z + \Phi(\xi, \eta, \zeta, 1) = 0.$$

**509.** Если определитель  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  отличен от нуля, то

можно найти такие величины для  $\xi, \eta$  и  $\zeta$ , при которых  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0$ . Доказать, что при переносе начала координат в точку

( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) уравнение поверхности  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$  переходит в такое:

$$f(x, y, z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_1 = 0.$$

Здесь  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_1$  — частная производная, взятая при  $t = 1$ . Указанный перенос есть преобразование к центру.

510. Если  $(x, y, z)$  — середина хорды поверхности  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ , а  $(x + l\sigma, y + m\sigma, z + n\sigma)$  и  $(x - l\sigma, y - m\sigma, z - n\sigma)$  — её концы, то справедливо равенство:

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Доказать.

511. Доказать, что середины хорд поверхности  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ , параллельных вектору  $\mathbf{P}(l, m, n)$ , лежат на плоскости

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

(Диаметральная плоскость, сопряжённая с направлением вектора  $\mathbf{P}$ .)

512. Доказать, что для поверхности  $f(x, y, z) - k = 0$  уравнение диаметральной плоскости, сопряжённой с направлением вектора  $\mathbf{P}(l, m, n)$ , можно написать в каждом из двух видов:

$$l \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} + n \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ и } \frac{\partial f(l, m, n)}{\partial l} x + \frac{\partial f(l, m, n)}{\partial m} y + \frac{\partial f(l, m, n)}{\partial n} z = 0.$$

513. Доказать, что для поверхности  $\Phi(x, y, z, 1) = 0$  уравнение диаметральной плоскости, сопряжённой с направлением вектора  $\mathbf{P}(l, m, n)$ , можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial f}{\partial l} x + \frac{\partial f}{\partial m} y + \frac{\partial f}{\partial n} z + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 = 0.$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial l}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial m}$  и  $\frac{\partial f}{\partial n}$  — частные производные от  $f(l, m, n)$ , а  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0$  — значение величины  $\frac{\partial \Phi(l, m, n, t)}{\partial t}$  при  $t = 0$ .

514. Найти диаметральную плоскость поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$ , сопряжённую с направлением вектора  $\mathbf{P}(1, -1, 0)$ .

515. Найти диаметральную плоскость поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$ , параллельную плоскости  $x + y + z = 0$ .

516. У той же поверхности найти диаметральную плоскость, проходящую через точки  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 0)$ .

517. Найти диаметральную плоскость поверхности  $x^2 + z^2 - 2x + 1 = 0$ , проходящую через точку  $(2, 1, 0)$ , а также направление, с ней сопряжённое.

518. Найти диаметрально плоскость поверхности  $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0$ , проходящую через начало координат.

519. Найти уравнения диаметра поверхности  $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y - 4z + 3 = 0$ , перпендикулярного к плоскости  $xOz$ .

520. Плоскость  $x = 0$  есть диаметрально плоскость поверхности  $xy = z$ . Найти хорды, с которыми она сопряжена.

521. Найти диаметрально плоскость, общую поверхностям  $x^2 + y + z = 0$  и  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ .

522. Найти уравнения диаметра поверхности  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$ , соответствующего плоскости  $x + y + z - 6 = 0$ .

523. Найти геометрическое место центров сечений поверхности  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2z - 1 = 0$  плоскостями, параллельными плоскости  $x - y + z = 0$ .

524. Зная диаметр  $y = z$ ,  $x - 1 = 0$  поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$ , найти уравнения плоскостей, ему соответствующих.

## § 6. Касательные плоскости и прямые к поверхностям 2-го порядка

Уравнение касательной плоскости к поверхности 2-го порядка  $\Phi(x, y, z, t) = 0$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  может быть написано в каждой из двух форм:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t = 0.$$

В первом из них производные взяты от  $\Phi(x, y, z, t)$  и в них положено  $t = 1$ , во втором — от  $\Phi(x_1, y_1, z_1, t)$  и в них положено  $t = 1$ .

Если в тех же уравнениях  $x_1, y_1, z_1$  — координаты некоторой точки, не обязательно лежащей на поверхности, то они изображают некоторую плоскость, называемую полярной плоскостью для точки  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Касательная прямая получается при пересечении касательной плоскости с любой плоскостью, проходящей через точку касания.

Если  $M(x, y, z)$  — точка поверхности, то вектор  $N$ , проекции которого на оси координат равны величинам  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  при  $t = 1$ , направлен по нормали к поверхности в точке  $M$ .

525. Доказать, что плоскость, касательная к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ , может быть представлена уравнением

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

526. Доказать, что плоскость, касающаяся гиперboloида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \sigma$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ , имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = \sigma.$$

527. Доказать, что плоскость, касающаяся в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  параболоида  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$ , имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = z + z_1.$$

528. Найти уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  и отсекающей на осях отрезки, отношение которых  $a : b : c$ .

529. Такой же вопрос для гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

530. На эллипсоиде  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  найти точку так, что касательная плоскость в ней отсекает на осях координат отрезки равной длины.

531. На касательной плоскости к эллипсоиду предыдущей задачи плоскостями координат образован треугольник с центром тяжести в точке касания. Найти координаты точки касания.

532. Доказать, что при  $a^2 + b^2 + c^2 = l^2$  эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  вписан в октаэдр  $|x| + |y| + |z| = l$ .

533. Доказать, что все нормали к поверхности  $xy + xz + yz = 0$  образуют одинаковый угол с прямой  $x = y = z$ .

534. Доказать то же для поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz + 1$ .

535. На поверхности  $xy + xz + yz = 3$  найти точку, ближайшую к плоскости  $x + y + z = 0$ .

536. На поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 6$  найти наиболее высокую и наиболее низкую точки

537. На гиперболическом параболоиде  $xy = z$  найти точки, нормаль в которых составляет с  $Oz$  угол  $45^\circ$ .

538. На параболоиде  $x^2 - y^2 = az$  проводится линия, во всех точках которой нормаль к поверхности составляет с  $Oz$  постоянный угол. Доказать, что проекция этой линии на  $xOy$  есть окружность с центром в начале координат.

539. Доказать, что плоскость, касающаяся поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$  в точке  $M(x_1, y_1, z_1)$ , содержит прямую, проведенную из начала координат в точку  $M$ .

540. Плоскость, касательная к гиперболоиду  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  в точке  $(1, 0, 0)$ , пересекается с ним по двум прямым. Определить угол между ними.

541. Тот же вопрос для параболоида  $x^2 - y^2 = z$  и точки  $(0, 0, 0)$ .

542. Через прямую  $z = c\sqrt{3}, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  провести плоскость, касательную к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**543.** Конусы касаются эллипсоида предыдущей задачи по плоским линиям, плоскости которых параллельны плоскости  $x + y + z = 0$ . Доказать, что геометрическое место вершин конусов есть прямая  $x = a^2t, y = b^2t, z = c^2t$ .

**544.** Доказать, что условием касания плоскости  $z = \alpha x + \beta y + \gamma$  и поверхности  $Ax^2 + By^2 - 2Cz = 0$  является равенство  $\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = 0$ .

**545.** Доказать, что плоскость, параллельная плоскости  $z = \alpha x + \beta y$  и касающаяся эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , имеет уравнение  $z = \alpha x + \beta y \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2}$ .

**546.** Доказать, что условие касания прямой  $x = a + lt, y = b + mt, z = c + nt$  и поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$  выражается равенством

$$(Aal + Bbm + Ccn)^2 = (Al^2 + Bm^2 + Cn^2)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + D).$$

Если при этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} Aal + Bbm + Ccn &= 0, & Al^2 + Bm^2 + Cn^2 &= 0, \\ Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + D &= 0, \end{aligned}$$

то прямая лежит на поверхности.

**547.** Прямая, параллельная вектору  $P(l, m, n)$ , касается в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ . Доказать, что  $Alx_1 + Bmy_1 + Cnz_1 = 0$ .

**548.** Плоскость, перпендикулярная к вектору  $P(l, m, n)$ , касается поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ . Показать, что её уравнение имеет вид:

$$lx + my + nz = \pm \sqrt{-D \left( \frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} \right)}.$$

**549.** Плоскость, перпендикулярная к вектору  $P(l, m, n)$ , касается поверхности  $Ax^2 + By^2 + z = 0$ . Показать, что её уравнение имеет вид:

$$lx + my + nz = \frac{l^2}{4An} + \frac{m^2}{4Bn}.$$

**550.** Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трёхгранных углов, касающихся гранями поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ , есть поверхность шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = -D \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right),$$

предполагая, что правая часть положительна.

**551.** Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трёхгранных углов, касающихся гранями поверхности  $Ax^2 + By^2 + z = 0$ , есть плоскость  $z = \frac{1}{4A} + \frac{1}{4B}$ .



**552.** Эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$  скользит, касаясь трёх координатных плоскостей. Доказать, что расстояние его центра от начала координат равно  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

**553.** Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трёхгранных углов, касающихся рёбрами поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ , есть поверхность

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = (A + B + C)(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D).$$

**554.** Прямоугольный трёхгранный угол скользит, касаясь рёбрами поверхности  $Ax^2 + By^2 + 2z = 0$ . Доказать, что его вершина движется по поверхности

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)z = \frac{1}{AB}.$$

**555.** Найти минимальные размеры ящика со стенками, параллельными плоскостям координат, в который может быть вложен эллипсоид

$$(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

**556.** Шар  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  освещён пучком лучей, параллельных прямой  $x = y = z$ . Найти форму тени на плоскости  $xOy$ .

**557.** Найти тень от эллипсоида  $(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  на плоскости  $x + y + z = 0$ , если лучи перпендикулярны к этой плоскости.

**558.** Параболоид  $xy = z$  проектируется на плоскость  $xOy$  лучами, параллельными прямой  $x = y = z$ . Найти форму тени.

**559.** Точки касания плоскостей с поверхностью 2-го порядка расположены на линии пересечения её с плоскостью, проходящей через центр. Доказать, что касательные плоскости параллельны одной и той же прямой.

**560.** Около эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , где  $a \geq b \geq c$ ,  $a > c$ , можно описать цилиндр с круговым поперечным сечением. Найти уравнение цилиндра.

**561.** Доказать, что при движении точек по некоторой плоскости полярная плоскость точки относительно данной поверхности 2-го порядка вращается около соответствующей точки.

**562.** Доказать, что при движении точки по прямой её полярная плоскость вращается вокруг соответствующей прямой.

**563.** Найти геометрическое место точек касания касательных прямых, проведённых из данной точки к данной поверхности 2-го порядка.

**564.** Найти геометрическое место касательных к данной поверхности 2-го порядка, параллельных вектору  $\mathbf{P}(l, m, n)$ .

**565.** Круг радиуса  $a$  скользит, касаясь трёх координатных плоскостей. Найти поверхность, по которой движется его центр.

**566.** Прямоугольный трёхгранный угол касается гранями данной окружности радиуса  $a$ . Доказать, что его вершина описывает поверхность шара  $a\sqrt{2}$ .

## § 7. Упрощение уравнений поверхностей 2-го порядка

Уравнение поверхности 2-го порядка можно написать в таком виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0,$$

или, сокращённо,

$$F(x, y, z) = 0.$$

Здесь члены второй степени относительно координат образуют тройничную квадратичную форму  $f(x, y, z)$  или попросту  $f$ . Таким образом

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

Упрощение уравнений 2-го порядка можно выполнять, исходя из свойств диаметральной плоскости, сопряжённой с направлением вектора  $P(l, m, n)$ , т. е. делящей пополам хорды, параллельные этому вектору. Её уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} l + \frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial z} n \right] = 0$$

или, в полной форме:

$$(Ax + Dy + Ez + G)l + (Dx + By + Fz + H)m + (Ex + Fy + Cz + I)n = 0.$$

То же уравнение можно записать ещё и так:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial l} x + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial m} y + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n} z + Gl + Hm + In = 0; f = f(l, m, n),$$

или, в полном виде:

$$(Al + Dm + En)x + (Dl + Bm + Fn)y + (El + Fm + Cn)z + Gl + Hm + In = 0.$$

Направления вектора и сопряжённой диаметральной плоскости можно назвать главными, если плоскость перпендикулярна к вектору. Главная диаметральная плоскость есть плоскость симметрии поверхности. Для вектора главного направления выполняются условия:

$$Al + Dm + En = \lambda l, \quad Dl + Bm + Fn = \lambda m, \quad El + Fm + Cn = \lambda n. \quad (**)$$

Поэтому  $\lambda$  удовлетворяет характеристическому уравнению квадратичной формы  $f$ , имеющему вид:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & D & E \\ D & B - \lambda & F \\ E & F & C - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (***)$$

Найдя какой-нибудь корень этого уравнения, из равенств (\*) можно найти направление вектора  $P(l, m, n)$ . Уравнение (\*\*) всегда имеет вещественные корни, если коэффициенты  $A, B, C, D, E, F$  вещественны. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два различных его корня, то соответствующие им главные направления векторов  $P_1(l_1, m_1, n_1)$  и  $P_2(l_2, m_2, n_2)$  взаимно перпендикулярны. Если корни характеристического уравнения (\*\*) различны, то получаются три взаимно перпендикулярных вектора главного направления:  $P_1(l_1, m_1, n_1)$ ,  $P_2(l_2, m_2, n_2)$  и  $P_3(l_3, m_3, n_3)$ . Если оси координат направить по этим направлениям, то уравнение поверхности приобретает вид:

$$A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + 2G_1x_1 + 2H_1y_1 + 2I_1z_1 + K_1 = 0. \quad (***)$$

При этом, если уравнение было раньше преобразовано переносом начала координат в центр, то уравнение получает ещё более простой вид:

$$A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + K_1 = 0.$$

Если центра у кривой нет, то в уравнении (\*\*\*) один или два из коэффициентов  $A_1, B_1$  и  $C_1$  обращаются в нуль, а соответствующий из коэффициентов  $G_1, H_1, K_1$  не равен нулю.

I.  $C_1 = 0, A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, J_1 \neq 0$ . В этом случае можно перенести начало координат в такую точку, что уравнение принимает вид

$$A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + H_2 z_2 = 0.$$

II.  $B_1 = 0, C_1 = 0, H_1 \neq 0, I_1 \neq 0$ . Здесь можно, сохраняя прежнее направление оси  $O_1 x_1$ , заменить  $y_1$  и  $z_1$  так, чтобы уравнение получило вид:

$$A_1 x_2^2 + H_2 y = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь равные корни. При этом, если все три корня равны, то менять направления осей излишне — независимо от их выбора, уравнение, после переноса начала в центр, получает вид:

$$A(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + K_1 = 0.$$

Если равны два корня:  $\lambda_2 = \lambda_3$ , а  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то значение  $\lambda$  даёт возможность найти одно главное направление и вектор  $P_1(l, m_1, n_1)$  этого направления. Два другие в этом случае не вполне определены. Их можно выбрать следующим способом:

$$P_2 = [P_1 r_1], \quad P_3 = [P_3 P_1].$$

Здесь  $r$  — любой вектор, не параллельный  $P_1$ .

Заметим, что характеристическое уравнение в раскрытом виде можно написать так:

$$+\lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0,$$

где коэффициенты  $p, q$  и  $r$  выражаются равенствами:

$$\begin{aligned} p &= A + B + C, \\ q &= AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2, \\ r &= AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF. \end{aligned}$$

Они являются инвариантами уравнения поверхности 2-го порядка, т. е. их величина не изменяется при замене координат, включая и поворот осей и перенос начала.

567. Найти плоскость симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - x + 4y - z + 2 = 0.$$

568. Найти плоскости симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 9z - 1 = 0.$$

569. Найти плоскости симметрии поверхности

$$xy + xz + yz = 1.$$

570. В уравнении поверхности 2-го порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0$$

величина определителей

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix},$$

которые можно назвать дискриминантами квадратичных форм

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

и

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gxt + 2Hyt + 2Izt + Kt^2,$$

являются инвариантами, как и величины

$$p = A + B + C, q = AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2.$$

Пользуясь этим, доказать, что уравнения поверхности с центром, при  $\Delta_3 \neq 0$ , можно привести к виду:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

571. Доказать, что при  $\lambda_3 = 0$ ,  $q \neq 0$  уравнение поверхности можно привести к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = \frac{\Delta_4}{q} z.$$

572. Доказать, что при  $\Delta_4 = 0$  поверхность есть конус или цилиндр, либо уравнение изображает точку, прямую или пару плоскостей.

Упростить уравнения следующих поверхностей и дать формулы преобразования координат, которыми это упрощение достигается.

573.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 1 = 0.$

574.  $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$

575.  $2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0.$

576.  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12xy - 8xz - 4yz + 14x + 16y - 12z - 33 = 0.$

577.  $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 4y - 14z = 0.$

578.  $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0.$

579.  $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0.$

580.  $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$

581.  $y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0.$

582.  $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0.$

583.  $7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz = 0.$

584.  $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = 0.$

585.  $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 49.$

586.  $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 0.$

587.  $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 21 = 0.$

588. Составить уравнение геометрического места вершин поверхностей  $4y^2 - 2z^2 + x + ay + bz = 0.$

589. Определить  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы уравнение  $x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 = 1$  изображало цилиндр вращения.

590. Найти условие для  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при котором уравнение  $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$  представляет поверхность вращения.

**591.** Найти ось вращения поверхности

$$y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2) + 2\lambda xz - 2x = 0.$$

**592.** Найти  $c$ , при котором конус  $x^2 - 2xy + cz^2 = 0$  есть конус вращения, и дать уравнения оси.

**593.** Доказать, что конус с вершиной в точке  $(1, 0, 0)$  и с направляющей  $x^2 + y^2 - 2x - y = 0, z = 1$  есть конус вращения.

**594.** Исследовать характер поверхности

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2xy - 2xz - 2yz = 2m^2 - 3m + 1$$

при изменении  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

**595.** При каком соотношении между  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\alpha xz + 2\beta yz - 2x - 4y + 2z = 0$$

представляет коническую поверхность?

**596.** Найти уравнение геометрического места точек вне куба со стороной  $a$ , произведение расстояний которых до трёх сходящихся граней куба равно произведению расстояния до трёх других граней куба.

**597.** Определить вид поверхности, получающейся при движении прямой, параллельной плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  и скользящей по прямым  $x = 0, z = a; y = 0, z = -a$ .

**598.** Векторы  $P(a, b, c)$ ,  $P_1(a_1, b_1, c_1)$  и  $P_2(a_2, b_2, c_2)$  взаимно перпендикулярны. Доказать, что поверхность

$$A(ax + by + cz + d)^2 + B(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)^2 + \\ + C(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)^2 + D = 0$$

имеет главными направлениями векторы  $P, P_1, P_2$ .

**599.** Поверхность 2-го порядка проходит через точки  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, -1)$ ,  $(0, 0, 1)$  и имеет плоскости симметрии

$$x + y + z = 0, 2x - y - z = 0, y - z + 1 = 0.$$

Найти её уравнение.

**600.** Цилиндр проходит через точки  $(1, 0, -1)$ ,  $(2, 0, 2)$ . Его ось дана уравнениями  $x = -y = z$ , а плоскости симметрии — уравнениями  $x + 2y + z = 0$  и  $x = z$ . Найти цилиндр.

**601.**  $x = 0$  и  $y = 0$  — плоскости симметрии поверхности. Точки  $(0, 1, 1)$ ,  $(2, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$  и  $(2, 0, 3)$  — на поверхности. Найти её уравнение.

**602.** Поверхность вращения проходит через точки  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 2)$ . Ось вращения — ось  $Oz$ . Найти уравнение поверхности.

**603.** Образующие параболического цилиндра параллельны прямой  $2x = 2y = -z$ , уравнение плоскости симметрии  $x + y + z = 0$ , а точки  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$  — на поверхности. Найти уравнение цилиндра.

**604.**  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $s_3 = 0$  — уравнения трёх диаметральных плоскостей поверхности. При этом каждая из них сопряжена с линией пересечения двух других плоскостей. Доказать, что уравнение поверхности можно написать в таком виде:

$$As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2 + D = 0.$$

**605.** Три хорды эллипсоида, проходящие через центр, такие, что каждая из них сопряжена с плоскостью, проходящей через две другие, можно назвать тремя взаимно сопряжёнными осями эллипсоида. Доказать, что объём параллелепипеда, построенного на трёх взаимно сопряжённых осях эллипсоида, есть величина постоянная.

**606.** Доказать, что уравнение

$$(ax + by + cz + d)^2 \pm (ax + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = px + qy + rz + s$$

изображает параболоид, у которого  $px + qy + rz + s = 0$  — касательная плоскость, а совместные уравнения

$$ax + by + cz + d = 0, \quad ax + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

дают диаметр, проходящий через точку касания.

**607.** Найти уравнение параболоида, касающегося плоскости  $x + y + z = 0$  в начале координат, имеющего диаметрально плоскость  $x = y$  и проходящего через точки  $(1, 1, 2)$ ,  $(0, 2, 2)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(\frac{9}{2}, 2, 2)$ .

## § 8. Круговые сечения, прямолинейные образующие и другие задачи

**608.** Через прямую  $2x = 2y = z$  провести плоскость, пересекающую поверхность  $4x^2 - y^2 + z = 0$  по равнобочной гиперболе.

**609.** Найти геометрическое место центров сечений эллипсоида  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  плоскостями, проходящими через прямую  $x = y = z$ .

**610.** Найти вершину параболы, получающейся при сечении цилиндра  $y^2 = 2x$  плоскостью  $x + y + z = 1$ .

**611.** Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии эллипсов, получаемых при сечении эллипсоида  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  плоскостями, параллельными плоскости  $2x + y + z = 0$ .

**612.** Найти уравнения оси параболы, получаемой в сечении поверхности  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$  плоскостью  $x + y - 2z = 1$ .

**613.** Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии пересечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$  плоскостями, параллельными плоскости  $x + y + z = 0$ .

**614.** Найти плоскость, в которой лежат оси симметрии парабол, получаемых при пересечении поверхности  $y^2 + 2z^2 = 2x$  плоскостями, перпендикулярными к вектору  $P(0, 1, -1)$ .

**615.** Найти плоскость, проходящую через начало координат и через ось вращения поверхности

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 3x + 2y + z = 0.$$

**616.** Найти уравнения плоскостей, пересекающих эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  по кругам. При этом  $a > b > c$ .

**617.** Найти геометрическое место вершин конусов, касающихся эллипсоида предыдущей задачи по кругам.

**618.** Найти круговые сечения однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  при  $a > b$ .

**619.** Найти круговые сечения поверхности

$$2x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - 2x = 0.$$

**620.** Найти геометрическое место центров круговых сечений эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y + 4z + 2 = 0.$$

**621.** Найти общий вид плоскостей, пересекающих по кругам поверхность

$$x^2 + y^2 - \lambda xz - \mu yz - \lambda az - a^2 = 0.$$

**622.** Найти круговые сечения поверхности

$$x^2 + y^2 + az^2 + bxz + cyz + dx + ey + fz + g = 0.$$

**623.** При каких  $\lambda$  и  $\mu$  круговые сечения поверхности  $x^2 + y^2 - \lambda xz - \mu yz - \lambda az - a^2 = 0$  перпендикулярны к вектору  $P(1, 1, 1)$ ?

**624.** Найти уравнение цилиндра, проходящего через круг  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  и точку  $(0, 1, 1)$  и имеющего взаимно перпендикулярные плоскости круговых сечений.

**625.** Каково геометрическое место центров сфер радиуса  $R$ , пересекающих эллипсоид  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  по кругам?

**626.** Найти геометрическое место вершин конусов вращения, проходящих через параболу  $z = 0$ ,  $y^2 = 2px$ .

**627.** Поверхности 2-го порядка с центром в точке  $(a, b, c)$  проходят через круг  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ . Найти геометрическое место круговых сечений, плоскости которых проходят через начало координат.

**628.** Найти уравнения прямых, по которым поверхность конуса вращения  $xy + xz + yz = 0$  пересекается с плоскостью, проходящей через ось и точки  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 2, 3)$ .

**629.** На гиперболическом параболоиде  $y^2 - z^2 = 2x$  найти место точек, через которые проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

**630.** Тот же вопрос для поверхности  $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$ .

**631.** Найти прямолинейные образующие поверхности

$$xy + xz + x + y + 1 = 0.$$

**632.** Тот же вопрос для поверхности

$$x^3 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6 = 0.$$

633. Найти уравнения прямолинейных образующих поверхности  $4y^2 - z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0$ , пересекающих ось  $Ox$ .

634. Найти величину наибольшего угла между образующими конуса  $x^2 + y^2 = (x + y + z)^2$ , а также направление его оси.

635. Найти уравнение гиперболоида, у которого прямые  $2x - 1 = 0$ ,  $y = z$ ;  $2x = z$ ,  $y + 1 = 0$ ;  $2x = -z$ ,  $y = 1$  являются образующими одной системы.

636. Найти уравнение параболоида, у которого прямые

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ y + z - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - z + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

— образующие одной системы.

637. Найти общее уравнение параболоидов, проходящих через круг  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$  и имеющих ось, параллельную вектору  $P(l, m, n)$ .

638. Найти уравнение конуса, на поверхности которого лежат круги  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 - 2az = 0$ ;  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 2bx$ .

639. Найти координаты вершины конуса, на поверхности которого лежат круг  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 = 2az$  и парабола  $z = 0$ ,  $y^2 = 2px$ .

640. Найти параболоид, на котором лежат точки  $(0, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 0)$  и прямые  $x = 0$ ,  $z = 2$ ;  $y = 0$ ,  $z = -2$ .

641. Найти параболический цилиндр, на котором лежат параболы  $z = 0$ ,  $y^2 = 2x$ ;  $x = z$ ,  $2y^2 = x + z$ .

642. Найти параболоид вращения, проходящий через точку  $(1, 1, 2)$  и круг  $x = z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z$ .

643. Каково геометрическое место центров сфер данного радиуса, пересекающих эллиптический параболоид по кругам?

644. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением эллипсоида  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  плоскостью  $x + y + z = 0$ .

645. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением параболоида  $2y^2 + z^2 - 2x = 0$  плоскостью  $x = y$ .

646. Найти параметр параболы, лежащей на поверхности  $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0$  и в плоскости  $x = z$ .

647. Конус имеет вершину в фокусе вытянутого эллипсоида вращения и опирается на плоское сечение того же эллипсоида. Доказать, что этот конус есть конус вращения.

---



# ОТДЕЛ III

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### § 1. Теория пределов

Если числитель и знаменатель рациональной дроби при  $x = a$  обращаются в нуль, то дробь можно сократить на  $x - a$ . Поэтому, например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3}.$$

Пользуясь этим приёмом сокращения дробей, найти пределы в следующих примерах.

$$648. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}.$$

$$649. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$650. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}.$$

$$651. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$652. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}; n — целое.$$

$$653. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; m \text{ и } n — \text{целые.}$$

$$654. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$655. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right); a \text{ и } b — \text{целые.}$$

$$656. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \dots (x^{n-k+1} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1) \dots (x^k - 1)}.$$

Следующие задачи сводятся к предыдущему типу. введением новой переменной: величину, стоящую под радикалом, обозначают через  $u^n$ , где показатель  $n$  выбирают так, чтобы корень извлекался.

$$657. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{p}{q}} - 1}{x^{\frac{r}{s}} - 1}.$$

$$658. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}.$$

$$659. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}.$$

$$660. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}.$$

Если числитель и знаменатель содержат степени переменной, которая стремится к бесконечности, то во многих случаях предел выражения удобно находить, разделив числитель и знаменатель на соответствующую степень переменной. Так, например, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \sqrt{n^3 + 2}}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^4}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3.$$

Следующие задачи решаются этим приёмом либо прямо, либо после предварительного преобразования.

$$661. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2}.$$

$$662. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1}.$$

$$663. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}.$$

$$664. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}.$$

$$665. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

$$666. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}.$$

$$667. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right).$$

$$668. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$669. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right].$$

Замечание. В последней задаче, а также и в следующих удобно пользоваться формулой для суммы квадратов натуральных чисел:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

легко доказываемой по методу полной индукции.

$$670. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}. \quad 671. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right).$$

$$672. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3}.$$

$$673. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

Одним из приёмов нахождения пределов иррациональных выражений является перевод иррациональности из знаменателя в числитель или из числителя в знаменатель. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1})} \times \\ &\times \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x) - (3x-2)}{(4x+1) - (5x-1)} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{-x+2} \cdot \frac{3+3}{2+2} = 3. \end{aligned}$$

Подобными приёмами решаются следующие задачи.

$$674. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}.$$

$$675. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

$$676. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$677. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$678. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}.$$

$$679. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}.$$

$$680. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}.$$

$$681. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - x.$$

$$682. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

$$683. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}).$$

$$684. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x).$$

$$685. \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2+1} - x).$$

$$686. \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

$$687. \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{\frac{4}{3}} - (x^2-1)^{\frac{2}{3}}].$$

$$688. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$689. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}).$$

$$690. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x].$$

$$691. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}).$$

692. Определить  $\lambda$  и  $\mu$  из условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu) = 0.$$

693. Определить  $\lambda$  и  $\mu$  из условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sum_{v=1}^n \sqrt{a_v x^2 + b_v x + c_v} - \lambda x - \mu] = 0; a_v > 0.$$

Иногда оказывается возможным путём удачного преобразования выражения свести вычисление его предела к нахождению пределов более простых выражений. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[5]{1+3x^4} - 1) - (\sqrt{1-2x} - 1)}{(\sqrt[3]{1+x} - 1) - (\sqrt{1+x} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[5]{1+3x^4} - 1}{x} - \frac{\sqrt{1-2x} - 1}{x}}{\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} - \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}} = \frac{0 - (-1)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = -6. \end{aligned}$$

Подобными приёмами легко решаются следующие примеры:

$$694. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}.$$

$$695. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x} - \sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x} + x - \sqrt[6]{1+x}}.$$

$$696. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a^2 + ax + x^2} - \sqrt[3]{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

$$697. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}.$$

Иногда при нахождении пределов формальные преобразования не достигают цели и нужно рассмотрение по существу. Так, например, при изучении выражений, содержащих  $a^n$ , при  $n \rightarrow \infty$ , надо иметь в виду, что при  $0 < a < 1$  величина  $a^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а при  $a > 1$  величина  $a^n$  безгранично растёт. Пользуясь этим, легко решить следующие примеры, в которых  $a > 0$ .

$$698. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n}.$$

$$699. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}.$$

$$700. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}.$$

$$701. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}.$$

При изучении пределов тригонометрических выражений очень часто удобно пользоваться фундаментальной теоремой, по которой  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Так, например, при нахождении величины  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$  полагаем  $x = \pi + u$ , где  $u \rightarrow 0$ . После этого без труда находим:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin (3\pi + 3u)}{\sin (5\pi + 5u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin 3u}{\sin 5u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3u}{3u}}{\frac{\sin 5u}{5u}} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Подобными приёмами, а иногда и применением способов, разобранных раньше, решаются следующие примеры.

$$702. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

$$703. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$704. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}.$$

$$705. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

$$706. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad m \text{ и } n \text{ — целые числа.}$$

$$707. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$708. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$709. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$710. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}.$$

$$711. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$712. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$713. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

$$714. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2 \sin a}{x^2}.$$

$$715. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2 \cos a}{1 - \cos x}.$$

$$716. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

$$717. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - 1}}{x^2}.$$

$$718. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

$$719. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}.$$

$$720. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$721. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

$$722. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[m]{\cos \beta x}}{x^2}.$$

$$723. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$724. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$$

$$725. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Следующий ряд задач содержит пределы выражений, у которых показатель степени бесконечно возрастает, т. е. выражений вида  $u^v$ , где  $u \rightarrow 1$ , а  $v \rightarrow \infty$ . Все они могут решаться введением новой переменной  $n$  по такой схеме:

$$u^v = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^v = \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n} v} = \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{(u-1) v}.$$

Отсюда следует:

$$\lim u^v = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\lim (u-1) v} = e^{\lim (u-1) v}.$$

Здесь предел выражения в показателе находится предыдущими приёмами.

$$726. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x.$$

$$727. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}.$$

$$728. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^4}.$$

$$729. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$730. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$731. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$732. \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{m} \right)^m.$$

$$733. \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{\sqrt{m}} \right)^m.$$

$$734. \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{m} + \lambda \sin \frac{x}{m} \right)^m.$$

$$735. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$736. \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \left( a + \frac{b}{m} \right)}{\sin a} \right]^m.$$

$$737. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x.$$

$$738. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sin \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi}{2} \right]^{\operatorname{tg} \frac{n-1}{n+1} \frac{\pi}{2}}.$$

$$739. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right]^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Следующие примеры, похожие на предыдущие по виду, отличаются по существу, так как в них основание не стремится к единице. Они решаются прямым рассмотрением вопроса.

$$740. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x^2 + 1} \right)^{x^2}.$$

$$741. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$742. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sin \left( \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\operatorname{tg} \frac{n+1}{n+3} \frac{\pi}{2}}; \quad n — \text{целое положительное}.$$

Дальнейшие несколько задач содержат логарифмы и показательные функции. При их решении важны два основных предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ где логарифм — натуральный.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ где логарифм — натуральный.}$$

$$743. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$744. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg_{10} x - 1}{x - 10}.$$

$$745. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$746. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n}.$$

$$747. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x}.$$

$$748. \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n} \right).$$

$$749. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}.$$

$$750. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}.$$

$$751. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha x})}{\ln(1 + e^{\beta x})}; \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$752. \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1).$$

$$753. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}).$$

$$754. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2).$$

$$755. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

$$756. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

$$757. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$758. \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^x - a^c}{x - c}.$$

$$759. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}, \quad a > 0.$$

$$760. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$761. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n; \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \dots, \quad a_m > 0$$

$$762. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}.$$

$$763. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x}.$$

## § 2. Разные задачи

**764.** Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots (1 + \lambda) > 1 + \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

где числа  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  одного знака и больше, чем  $-1$ .

**765.** Пользуясь неравенством Бернулли, доказать, что при  $n$  целом  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$ , если  $n > 1$ .

**766.** Доказать, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ , если  $n > 1$ .

**767.** Доказать, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ .

**768.** Величина  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  возрастает, а величина  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  убывает при возрастании целого числа  $n$ . Отсюда и из очевидного неравенства  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  вывести, что обе эти величины при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к общему пределу. Этот предел обозначается через  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**769.** Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

предполагая, что предел в правой части существует.

**770.** Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n},$$

предполагая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$  существует и что  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а числа  $v_n > 0$ .

**771.** Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}},$$

предполагая, что предел в правой части существует и  $v_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $v_n > v_{n-1}$ .

**772.** При  $m$  целом положительном доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

**773.** При том же условии доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} \right] = \frac{1}{2}.$$

774. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^m + 3^m + 5^m + \dots + (2n-1)^m}{n^m} - \frac{2^m n}{m+1} \right] = 0; \quad m - \text{целое} \geq 0.$$

775. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 3^m + 5^m + \dots + (2n-1)^m}{n^{m+1}} = \frac{2^m}{m+1}; \quad m - \text{целое} \geq 0.$$

776. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ , заметив сначала, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

777. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right)$ .

778. Из неравенств  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Исходя отсюда, доказать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon(n).$$

Здесь  $C$  — постоянная, называемая постоянной Эйлера, а  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

779. Пользуясь предыдущим результатом, доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

780. Исходя из равенства  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) \dots \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right).$$

781. Пользуясь формулой  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sin \frac{a}{n^2} + \sin \frac{3a}{n^2} + \dots + \sin \frac{(2n-1)a}{n^2} \right] = a.$$

782. Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \dots \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \rightarrow e^{-\frac{a^2}{6}}.$$



783. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \cos \frac{\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} + \dots + \cos \frac{(2n+1)\pi}{4n} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

784. Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2},$$

изучив возможности сокращения дроби, стоящей в одной скобке, с соседними с ней дробями.

Доказать следующие равенства.

$$785. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$786. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \dots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$787. \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}; |x| < 1.$$

$$788. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \text{ (Эйлер).}$$

$$789. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dots \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots+\sqrt{2}}}}} = \frac{\pi}{2} \text{ (Виета).}$$

790. Последовательность значений  $u_n$  даётся формулами:  $u_1 = \sqrt{2}$ ,  $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$  и вообще  $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ . Заменяв последнюю двойку под радикалом на 4, убедиться, что  $u_n$  ограничено. Доказав, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  существует, найти его из равенства  $u_n^2 = 2 + u_{n-1}$ .

З а м е ч а н и е. Ещё легче находится этот предел из равенства  $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ .

791. Последовательность  $v_n$  задана равенствами:

$$v_1 = \sqrt{a}, \quad v_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad v_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \dots; a > 0.$$

Заменяв под последним корнем число  $a$  величиной  $a + x$ , где  $x$  — положительный корень уравнения  $x^2 = a + x$ , убедиться, что  $v_n$  ограничено, и доказать, что  $v_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ .

792. Последовательность чисел задаётся равенствами

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}.$$

Найти выражение  $x_n$  через  $a$  и  $b$  и найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

793. Даны числа  $a$  и  $b$ , где  $a > b > 0$ . Затем составляются новые пары чисел по формулам:  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ .

При этом  $a_0 = a$  и  $b_0 = b$ . Доказать, что  $a_n b_n = ab$ , что

$$\frac{a_n - \sqrt{a_n b_n}}{a_n + \sqrt{a_n b_n}} = \left( \frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} \right)^{2^n}$$

и, наконец, что  $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{ab}$ .

**794.** По двум данным положительным числам  $a$  и  $b$  можно построить ряд новых чисел с помощью равенств:  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ ,  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$  и, вообще,  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ . Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$  числа  $a_n$  и  $b_n$  стремятся к общему пределу. (Арифметико-геометрическое среднее Гаусса.)

**795.** Две последовательности чисел составляются по формулам:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}.$$

При этом  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  — данные положительные числа. Найти  $\lim a_n$ , равный  $\lim b_n$ , полагая  $a = b \cos \varphi$  при  $a < b$  и  $a = b \operatorname{ch} \varphi$  при  $a > b$ .

**796.** Последовательность чисел составляется по формулам:  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$ , где  $a > 0$  — данное число, а  $x_0$  — произвольное положительное число. Доказать, что  $x_n \rightarrow \sqrt{a}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* На этом основан довольно удобный, особенно на арифмометре, способ извлечения корней.

**797.** Числа последовательности составляются по такому закону:  $x_0$  — произвольное положительное число, а дальнейшие находятся по формуле

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a},$$

где  $a$  — данное положительное число.

Доказать, что  $x_n \rightarrow \sqrt[3]{a}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Закон составления чисел  $x_n$  здесь сложнее, чем предыдущий, но зато числа  $x_n$  быстрее приближаются к  $\sqrt[3]{a}$ , чем раньше, особенно если  $x_0$  взять близким к  $\sqrt[3]{a}$ .

**798.** Доказать, что последовательности, составляемые подобно прежним по формуле  $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$  или по формуле  $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^3 + 2a)}{2x_n^3 + a}$ , стремятся к  $\sqrt[3]{a}$ .

**799.** Последовательность  $y_n$  определяется следующим способом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \text{ где } 0 < x < 1; y_2 = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2}, \text{ и вообще } y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}.$$

Доказать, что  $y_n$  — ограниченная монотонная величина и найти  $\lim y_n$ .

$$800. y_1 = \frac{x}{2}, \text{ где } 0 < x < 1; y_2 = \frac{x}{2} - \frac{y_1^2}{2}; \dots; y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}.$$

Показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  существует и равен  $\sqrt{1+x} - 1$ .

### § 3. Понятие о функции. Непрерывность. Графическое представление функций

801. Из кусков, длина которых равна 1 дм, 2 дм, 1 дм и вес которых равен 2 кг, 3 кг и 1 кг, составлен один сплошной брус АС. Найти вес отрезка АВ этого бруса в функции от длины его  $x$ , где  $x$  считается от точки А — начала куска весом в 2 кг.

802. В каких промежутках можно рассматривать функции  $y$ ,  $z$ ,  $u$  и  $v$ , определяемые равенствами

$$u = \ln(x^2 - 1), \quad v = \ln(x + 1) + \ln(x - 1),$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad z = \ln(x^2 - 3x + 2)?$$

803. В каких промежутках можно рассматривать функции

$$y = \arccos \frac{3}{x}, \quad z = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}?$$

804. В каких промежутках можно рассматривать функции, определённые равенствами:

$$y = x \ln x \quad \text{при } x \neq 0 \text{ и } y = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$z = \frac{1}{2} x \ln x^2 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } z = 0 \text{ при } x = 0?$$

805. Функция задана равенствами:

$$f(x) = 2x \text{ при } 0 \leq x < 1 \text{ и } f(x) = 3 - x \text{ при } 1 \leq x \leq 2.$$

Будет ли  $f(x)$  непрерывна во всём интервале  $0 \leq x \leq 2$ ?

806. При каком  $a$  функция  $y$ , заданная равенствами

$$y = x \ln(x^2) \text{ при } x \neq 0 \text{ и } y = a \text{ при } x = 0,$$

непрерывна в промежутке  $(-\infty, \infty)$ ?

807. Обозначая через  $[a]$  целую часть  $a$ , определить, при каких значениях  $x$  имеет разрыв непрерывности функция  $y$ , определённая равенством

$$y = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

808. При каком значении  $x$  функция  $e^{\frac{1}{x}}$  имеет разрыв непрерывности и каков этот разрыв?

809. Какой разрыв непрерывности и при каком  $x$  имеет функция

$$y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$$

810. При каких значениях  $x$  имеют разрыв непрерывности функции

$$u = \frac{x}{x^2 - 4}, \quad v = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}, \quad w = \frac{1}{x - x^3}?$$

При каких значениях  $x$  имеют разрыв следующие функции:

811.  $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$

812.  $\frac{x}{\sin x}.$

813.  $\ln \ln (1 + x^2).$

814.  $\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^2(x-1)}.$

815. Имеет ли разрыв непрерывности функция, определённая равенствами  $y = e^{\frac{1}{x^2}}$  при  $x \neq 0$  и  $y = 0$  при  $x = 0$ ?

Построить по точкам графики целых функций 2-й степени (параболы):

816.  $y = \frac{x^2}{4}.$

817.  $y = -\frac{x^2}{2}.$

818.  $y = \frac{x^2 - 3x}{4}.$

819.  $y = \frac{4x - x^2}{3}.$

820.  $y = ax^2$  при  $a = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$

821.  $y = ax^2 + x - 1$  при  $a = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}$ , и прямую  $x = y + 1$ .

822. Воспользовавшись тождеством

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (a \neq 0),$$

построить график функции  $y = ax^2 + bx + c$ .

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй (параболы высших порядков):

823.  $y = \frac{x^3}{10}.$

824.  $y = \frac{x^3 - 9x}{10}.$

825.  $y = \frac{x^4}{10}.$

826.  $y = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}.$

827.  $y = \frac{x^4 - 15x}{30}.$

828.  $y = \frac{4x - 5x^3 + x^5}{10}.$

829.  $y = \frac{x^6}{100}.$

830.  $y = \frac{x^7}{100}.$

Построить гиперболы, являющиеся графиками следующих дробных функций:

831.  $y = \frac{1}{x}.$

832.  $y = \frac{x}{x-1}.$

833.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}.$

834.  $y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}.$

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные оси  $Ox$ .

$$835. \quad y = \frac{1}{1+x^2} \text{ (локон Марии Анъези).}$$

$$836. \quad y = \frac{x}{1+x^2} \text{ (серпентин Ньютона).}$$

$$837. \quad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные осям:

$$838. \quad y = \frac{1}{x^2}.$$

$$839. \quad y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$840. \quad y = \frac{x}{3-x^2}.$$

$$841. \quad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$$842. \quad y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \quad 843. \quad y = \frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}.$$

Построить графики дробных функций, имеющие вертикальные и наклонные асимптоты:

$$844. \quad y = x + \frac{1}{x^2}.$$

$$845. \quad y = x + \frac{2x}{x^2-1}.$$

Построить графики следующих иррациональных функций.

$$846. \quad y = \pm \sqrt{x-2} \text{ (парабола).}$$

$$847. \quad y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{25-x^2} \text{ (эллипс).}$$

$$848. \quad y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} \text{ (гипербола).}$$

$$849. \quad y = \pm \frac{x\sqrt{x}}{2} \text{ (парабола Нейля).}$$

$$850. \quad y = \pm x \sqrt{\frac{x}{4-x}} \text{ (циссоида Диоклеса).}$$

$$851. \quad y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$852. \quad y = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$853. \quad y = \pm x^{\frac{3}{4}}.$$

Построить графики следующих трансцендентных функций.

$$854. \quad y = a^x \text{ при } a > 1 \text{ и при } a < 1.$$

$$855. \quad y = e^{-x^2}.$$

$$856. \quad y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$857. \quad y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$858. \quad y = \ln x. \quad 859. \quad y = A \sin x \text{ при } A = \frac{1}{2}, 1 \text{ и } 2.$$

$$860. \quad y = \sin \frac{x}{a} \text{ при } a = \frac{1}{2}, 1 \text{ и } 2.$$

$$861. \quad y = \cos x. \quad 862. \quad y = \sin(x+a).$$

$$863. \quad y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$864. \quad y = e^{-ax} \sin bx.$$

$$865. \quad y = \sin x^2.$$

$$866. \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$867. \quad y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$868. \quad y = x \sin \frac{1}{x}.$$

В высшей математике обратные тригонометрические функции имеют значительно большую важность, чем в элементарной. По определению имеем:

1) Если  $\sin y = x$ , то  $y = \arcsin x$ .

2) Если  $\cos y = x$ , то  $y = \arccos x$ .

3) Если  $\operatorname{tg} y = x$ , то  $y = \operatorname{arctg} x$ .

4) Если  $\operatorname{ctg} y = x$ , то  $y = \operatorname{arccotg} x$ .

Определённые таким образом функции от  $x$  многозначны. Чтобы сделать их однозначными, в определение этих функций вводят дополнительные условия. Они состоят в том, что значения  $\arcsin x$  и  $\operatorname{arctg} x$  берутся в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , а значения  $\arccos x$  и  $\operatorname{arccotg} x$  берутся в интервале  $(0, \pi)$ .

Построить графики функций:

$$869. \quad y = \arcsin x.$$

$$870. \quad y = \arccos x.$$

$$871. \quad y = \operatorname{arctg} x.$$

$$872. \quad y = \operatorname{arccotg} x.$$

$$873. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$874. \quad y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

$$875. \quad y = \arcsin(\sin x).$$

$$876. \quad y = \arccos(\cos x).$$

$$877. \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$

Доказать равенства:

$$878. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } x > 0 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \quad \text{при } x < 0.$$

$$879. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \text{ где}$$

$$\varepsilon = 0, \quad \text{если } xy < 1;$$

$$\varepsilon = -1, \quad \text{если } xy > 1 \text{ и } x < 0;$$

$$\varepsilon = 1, \quad \text{если } xy > 1 \text{ и } x > 0.$$

$$880. \quad \arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi, \text{ где}$$

$$\eta = 1, \quad \varepsilon = 0, \quad \text{если } xy < 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$\eta = -1, \quad \varepsilon = -1, \quad \text{если } x^2 + y^2 > 1 \text{ и } x < 0, y < 0;$$

$$\eta = -1, \quad \varepsilon = 1, \quad \text{если } x^2 + y^2 > 1 \text{ и } x > 0, y > 0.$$

$$881. \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{если } -1 < x < \infty;$$

$$= -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{если } -\infty < x < -1,$$

$$882. \quad \arccos x + \arccos \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3-3x^2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$883. \arcsin \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x, \text{ если } \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}.$$

$$884. \frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}.$$

$$885. 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \text{ при } x > 1.$$

$$886. \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( \tg \frac{2x-1}{2} \pi \right) = [x] \text{ целой части от } x, \text{ если}$$

$x$  — не целое.

887. Доказать, что сумма

$$\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$$

при  $x^2 < \frac{1}{2}$  не зависит от  $x$ .

Если график функции  $y=f(x)$  построен, то уравнение  $f(x)=0$  легко решить графически, измерив абсциссы точек, где график функции пересекает ось  $Ox$ .

Таким же образом, измеряя абсциссы точек пересечения линий  $y=\varphi(x)$  и  $y=\psi(x)$ , получаем корни уравнения  $\varphi(x)=\psi(x)$ . Степень точности такого решения может быть произвольно высока, если вычертить графики в окрестности точек пересечения в соответственном увеличенном масштабе.

888. Решить уравнение  $x^3 - 7x + 5 = 0$  построением графика функции  $y = \frac{x^3 - 7x + 5}{6}$ .

889. Решить уравнение  $x^3 + 3x + 2 = 0$ , построив график функции  $y = \frac{x^3 + 3x + 2}{10}$ .

890. Решить уравнение  $x^4 - 7x - 5 = 0$ , построив графики двух функций:  $y = \frac{x^4}{10}$  и  $y = \frac{7x+5}{10}$ .

891. Решить графически уравнение

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0,$$

построив графики двух функций:  $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{5}$  и  $y = \frac{3x - 2}{5x^2}$ .

892. Решить уравнение  $2^x = 4x$ , построив графики функций

$$y = \frac{2^x}{4} \text{ и } y = x.$$

893. Решить графически систему двух уравнений:

$$x^2 + y = 10, \quad x + y^2 = 4.$$

894. Решить уравнение  $x = \tg x$  графическим путём.

895. То же для уравнения  $e^x = \sin x$ .

896. Найти первые два положительных корня уравнения  $x \cos x = 1$ , построив графики функций  $y = \cos x$  и  $y = \frac{1}{x}$ .

### Изучение последовательностей, заданных законом составления:

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \dots,$$

можно облегчить, изучая графики двух функций:  $u = \varphi(x)$  (I) и  $v = x$  (II). Для этого проводим вертикаль  $x = x_0$  до пересечения в точке  $A_0$  с графиком функции  $u$ . Затем через точку  $A_0$  проводим горизонталь до пересечения в точке  $B_0$  с графиком функции  $v$ . Отсюда проводим вертикаль до пересечения в точке  $A_1$  с графиком  $u$ . Затем снова ведём горизонталь до точки  $B_1$  графика  $v$ , и т. д.

Ординаты точек  $A_0, A_1, A_2, \dots$  будут равны числам  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Во многих случаях из чертежа видно, стремятся ли точки  $x_n$  к пределу при возрастании  $n$ .

**897.** Последовательность чисел составляется по такому закону:

$$x_1 = \frac{1}{2} e^{-x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{2} e^{-x_1}, \quad x_3 = \frac{1}{2} e^{-x_2}, \dots,$$

где  $x_0$  — произвольное вещественное число. Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow \xi$ , где  $\xi$  — единственный корень уравнения  $2\xi = e^{-\xi}$ .

**898.** Числа последовательности составляются по такому закону:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma x_n + \delta},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — данные вещественные числа такие, что  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ,  $(\alpha + \delta)^2 \geq 4$ . Число  $x_0$  выбирается так, что  $\gamma x_0 + \delta \neq 0$ . Найти  $\lim x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### § 4. Нахождение производных

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах.

**899.**  $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12.$

**900.**  $y = x^4 - 3x^2 + 17.$

**901.**  $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$

**902.**  $y = x^3(x^2 - 1)^2.$

**903.**  $y = \frac{x-1}{x+1}.$

**904.**  $y = \frac{x}{1-x^2}.$

**905.**  $y = \frac{3x-1}{x^5}.$

**906.**  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$

**907.**  $y = \sqrt{x}.$

**908.**  $y = \sqrt[3]{x}.$

**909.**  $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

**910.**  $y = e^x(x^2 - 2x + 2).$

**911.**  $y = x \sin x.$

**912.**  $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

**913.**  $y = x \ln x - x.$

**914.**  $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9}x^3.$

**915.**  $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}.$

**916.**  $y = \frac{1}{\sin x}.$

**917.**  $y = \frac{1}{\cos x}.$

**918.**  $y = \frac{1}{\ln x}.$



919.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  
 921.  $y = (ax + b)^n$ .  
 923.  $y = (x^2 - 1)^5$ .  
 925.  $y = \sqrt{3x - 5}$ .  
 927.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .  
 929.  $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ .  
 931.  $y = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$ .  
 933.  $y = x\sqrt{x^2 + 1}$ .  
 935.  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ .  
 937.  $y = \sqrt[3]{(2x + 1)^2}$ .  
 939.  $y = \cos ax \sin bx$ .  
 941.  $y = e^{ax} \cos bx$ .  
 943.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .  
 945.  $y = \frac{x^4}{4} \left[ (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right]$ .  
 947.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} - \sqrt{x^2 + 1}$ .  
 948.  $y = \ln \frac{3 - x^2}{2 - x^2}$ .  
 949.  $y = \frac{1}{2a} \left[ \ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a + x} - \frac{a}{a + x} \right]$ .  
 950.  $y = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$ .  
 951.  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x$ .  
 952.  $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .  
 953.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$ .  
 954.  $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ .  
 955.  $y = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$ .  
 957.  $y = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{x}$ .  
 959.  $y = \operatorname{arc} \sin \sin x$ .  
 920.  $y = e^x (\sin x - \cos x)$ .  
 922.  $y = \sin^3 x$ .  
 924.  $y = \cos^5 x$ .  
 926.  $y = \sin 5x$ .  
 928.  $y = e^{-x}$ .  
 930.  $y = \ln \sin x$ .  
 932.  $y = \ln \operatorname{tg} x$ .  
 934.  $y = e^{-x^2}$ .  
 936.  $y = \ln (x^3 + x^2)$ .  
 938.  $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$ .  
 940.  $y = \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ .  
 942.  $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ .  
 944.  $y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ .  
 946.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$ .  
 956.  $y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}$ .  
 958.  $y = (\operatorname{arc} \sin x)^2$ .  
 960.  $y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x}$ .

$$961. y = \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

$$962. y = \arctg \frac{x+1}{x-1}; x \neq 1.$$

$$963. y = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$964. y = \arccos(3x-4x^3).$$

$$965. y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$966. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$967. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

$$968. y = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctg \left( \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tg} x \right).$$

$$969. y = \frac{2}{3} \arctg x + \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{1-x^2}.$$

$$970. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$971. y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctg \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right); a > b \geq 0.$$

$$972. y = x^x. \quad 973. y = x^{\sin x}. \quad 974. y = |x|. \quad 975. y = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

976. Из равенства

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

найти формулу для суммы  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ .

977. Из равенства

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

найти формулу для  $\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx$ .

978. Из равенства

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

получить формулу для суммы

$$\sin x + 3 \sin 3x + \dots + (2n-1) \sin (2n-1)x.$$

979. Существует формула

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{\pi}{m} \right) + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{2\pi}{m} \right) + \dots + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{m-1}{m} \pi \right) = m \operatorname{ctg} mx.$$

Получить отсюда, что

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 \left( x + \frac{\pi}{m} \right)} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \left( x + \frac{m-1}{m} \pi \right)} = \frac{m^2}{\sin^2 mx}.$$

## § 5. Геометрическое значение производной

Если  $y = f(x)$  — уравнение кривой, а функция  $f(x)$  имеет производную  $y' = f'(x)$ , то кривая имеет касательную в точке с абсциссой  $x$ . Если  $\alpha$  — угол наклона касательной, т. е. угол от положительного направления оси  $Ox$  до касательной, то  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ . В силу этого уравнение касательной к кривой имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

а уравнение нормали таково:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Здесь  $(x, y)$  — точка касания, а  $(X, Y)$  — точка на касательной или нормали. При этом  $y' = f'(x)$ . Если  $M(x, y)$  — точка касания,  $P$  — её проекция на ось  $Ox$ , а касательная и нормаль к кривой в точке  $M$  пересекают  $Ox$  соответственно в точках  $T$  и  $N$ , то получающиеся отрезки имеют названия:  $TP$  — подкасательная,  $PN$  — поднормаль,  $TM$  — касательная,  $MN$  — нормаль. Они выражаются через  $y$  и  $y'$ , взятые в точке касания, по формулам:

$$TP = \frac{y}{y'}, \quad PN = yy', \quad TM = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = y \sqrt{1 + y'^2}.$$

980. У параболы  $y = \frac{4x - x^2}{4}$  проведены касательные в точках  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 0)$ . Найти их углы наклона к оси  $Ox$ .

981. Найти угол наклона касательной к гиперболе  $xy = a^2$  в точке  $(a, a)$ .

982. Под каким углом кривая  $y = \ln x$  пересекает ось  $Ox$ ?

983. Тот же вопрос для синусоиды  $y = \sin x$ .

984. При каком значении  $A$  синусоида  $y = A \sin \frac{x}{a}$  пересекает  $Oy$  под углом  $45^\circ$ ?

985. При каком  $a$  кривая  $y = a^x$  пересекает ось  $Oy$  под углом  $45^\circ$ ?

986. Под каким углом пересекаются с осью  $Oy$  кривые

$$y = \sin x \sqrt{3}, \quad y = \frac{x}{1+x^2}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

987. При каком значении  $a$  кривая  $y = \frac{ax - x^3}{4}$  пересекает ось  $Ox$  под углом  $45^\circ$ ?

988. Доказать, что у параболы  $y = ax^2$  подкасательная равна половине абсциссы.

989. Доказать, что у параболы  $y^2 = 2px$  поднормаль постоянна, независимо от выбора точки касания.

990. Доказать, что у кривой  $y = a^x$  подкасательная имеет постоянную длину.

991. Доказать, что у параболы  $y^2 = 2px$  подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания.

992. Доказать, что у цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  ордината есть среднее геометрическое между нормалью и величиной  $a$ .

993. Доказать, что у кривых  $y = ax^n$  отношение подкасательной к абсциссе точки касания есть величина постоянная.

994. Найти уравнение касательной к параболе  $y = 3x - x^2$  в точке (1, 2).

995. Найти касательную к параболе  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$ , параллельную прямой  $y = x$ .

996. Доказать, что касательная к гиперболе  $xu = a^2$  образует с осями координат треугольник постоянной площади.

997. Доказать, что у астроида  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  длина отрезка касательной между осями есть величина постоянная.

998. При каком соотношении между коэффициентами параболы  $y = ax^2 + bx + c$  касается оси  $Ox$ ?

999. Тот же вопрос для параболы 3-го порядка  $y = x^3 + px + q$ .

1000. При каком значении  $a$  кривая  $y = a^x$  касается прямой  $y = x$ ? Найти точку касания.

1001. Последовательность чисел составляется по такому закону:  $x_1 = a$ ,  $x_2 = a^a$ ,  $x_3 = a^{a^a}$ , ... и вообще  $x_n = a^{x_{n-1}}$ . Доказать, рассмотрением линий  $y = a^x$  и  $y = x$ , что при  $e^{-e} < a < e^{1/e}$  величина  $x_n$  стремится к определённому пределу, когда  $n \rightarrow \infty$ .

Если кривая задана в параметрическом виде уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t$  — параметр, то производную от  $y$  по  $x$  удобнее всего находить с помощью дифференциалов:  $dx = \varphi'(t) dt$ ,  $dy = \psi'(t) dt$ , откуда  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$  или  $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ .

1002. Эллипс задан уравнениями  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . Найти угол касательной к нему с осью  $Ox$ .

1003. Астроида задана уравнениями  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ . Найти угол касательной к ней с осью  $Ox$  в точке, где  $t = 135^\circ$ .

1004. Циклоида задана уравнениями

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Найти угол наклона касательной к ней.

1005. Циклоида образована качением круга по прямой. Доказать, что нормаль к циклоиде проходит через точку касания круга и прямой.

1006. Найти касательную к кривой  $x = t^2 - 3t + 4$ ,  $y = t^2 - 4t + 4$  в точке (2, 1).

1007. На кривой  $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1$ ,  $y = t^3 + t + 1$  найти точки, касательные в которых параллельны оси  $Oy$ .

1008. Найти наклон касательной к кривой

$$x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2, \quad y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2,$$

если (0, 0) — точка касания.

## § 6. Производные высших порядков

Производная от первой производной, т. е.  $(y')'$  или  $[f'(x)]'$ , называется второй производной и обозначается через  $y''$  или  $f''(x)$ .

Производная от второй производной называется третьей производной, и т. д. Во избежание смещения с показателем степени показателя про-

изводной обозначают числом, поставленным в скобки. Иногда применяют также римские цифры. Если в данной точке кривой  $y=f(x)$  величина  $y''>0$ , то кривая обращена выпуклостью вниз, т. е. в сторону отрицательного направления оси  $Oy$ . Если же  $y''<0$ , то кривая в окрестности данной точки обращена выпуклостью вверх. Если при переходе через данное значение  $x$  величина  $y''$  меняет знак, то точка на кривой при этом  $x$  есть точка перегиба.

1009. Показать, что кривая  $y=\ln x$  выпукла вверх.

1010. Показать, что кривая  $y=a^x$  выпукла вниз.

1011. Показать, что синусоида  $y=\sin x$  выпукла вверх, если  $y>0$ , и вниз, если  $y<0$ .

1012. Показать, что тангенсоида  $y=\operatorname{tg} x$  выпукла вниз там, где  $y>0$ , и вверх там, где  $y<0$ .

1013. Исследовать направление выпуклости кривой  $y=ax^3+bx$  при  $a>0$ .

1014. Найти точки перегиба кривой  $y=e^{-x^2}$ .

1015. Тот же вопрос для кривой  $y=\frac{1}{1+x^2}$ .

Производные высших порядков обыкновенно находятся последовательным дифференцированием. Иногда при этом обнаруживается закономерность, позволяющая написать производную высшего порядка, не находя предыдущих. К числу таких случаев относится формула Лейбница для производной порядка  $n$  от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v$$

Здесь  $C_n^1, C_n^2, \dots$  — биномиальные коэффициенты.

В следующих примерах найти производные указанного порядка.

1016.  $y=x^5$ . Найти  $y^{(5)}$ .

1017.  $y=x^6$ . Найти  $y^{(7)}$ .

1018.  $y=(3x+5)^2(2x^2+3)(x+7)^2$ . Найти  $y^{(6)}$ .

1019.  $y=\sqrt[5]{x^3}$ . Найти  $y'''$ .

1020.  $y=x^5 \ln x$ . Найти  $y'''$ .

1021.  $y=a^{3x}$ . Найти  $y'''$ .

1022.  $y=\frac{a}{x^m}$ . Найти  $y^{IV}$ .

1023.  $y=\frac{x^8}{x-1}$ . Найти  $y'''$ .

1024.  $y=x^2 e^{2x}$ . Найти  $y^{IV}$ .

1025.  $y=x^2 \cos 3x$ . Найти  $y^{IV}$ .

1026.  $y=x^2 e^{2x}$ . Найти  $y^{(50)}$ .

1027.  $y=x^3 \sin x$ . Найти  $y^{(40)}$ .

1028.  $y=e^x \sin x$ . Найти  $y^{IV}$ .

1029. Полагая  $y=e^x \sin x$ ,  $z=e^x \cos x$ , доказать равенства  $y''=2z$ ,  $z''=-2y$ .

1030. Доказать, что функция  $y=Ce^{-x}+C_1 e^{-2x}$  удовлетворяет уравнению  $y''+3y'+2y=0$ .

1031. Доказать, что функция  $y = e^{-x} \cos x$  удовлетворяет уравнению  $y^{IV} + 4y = 0$ .

В следующих задачах найти общее выражение для величины  $y^{(n)}$  при любом  $n$ .

$$1032. y = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$1033. y = \frac{x}{a+bx}.$$

$$1034. y = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

$$1035. y = \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$1036. y = \sqrt{x}.$$

$$1037. y = \sin^2 x.$$

$$1038. y = x^3 e^{mx}.$$

$$1039. y = x^2 \sin ax.$$

$$1040. y = x^3 \ln x$$

$$1041. y = \ln(ax+b).$$

$$1042. y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$1043. y = \sin ax.$$

$$1044. y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Доказать равенства:

$$1045. [e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx+n\varphi+c),$$

$$\text{где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$1046. \left( \frac{x^4+1}{x^3-x} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right].$$

$$1047. (\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

1048. Полагая  $y = \cos m \ln x$ , доказать, что

$$x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)xy^{(n+1)} + (n^2+m^2)y^{(n)} = 0.$$

1049. Полагая  $y$  равным одной из функций

$$\sin(m \arcsin x), \quad \cos(m \arcsin x), \quad \sin(m \arccos x), \quad \cos(m \arccos x),$$

доказать, что  $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$ .

1050. Доказать, что производная  $y^{(n)}$  сложной функции  $y = f(u)$ , где  $u = x^2$ , выражается формулой:

$$y^{(n)} = 2^n x^{nf(n)} + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} f^{(n-1)} + \\ + 2^{n-4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} f^{(n-2)} + \dots$$

1051. Производная порядка  $n$  от  $e^{-x^2}$  имеет вид  $e^{-x^2} H_n(x)$ , где  $H_n(x)$  — полином, называемый полиномом Чебышева-Эрмита. Доказать справедливость равенств:

$$1) H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

$$2) H_n(x) - H'_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}(x) = 0.$$

$$3) H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

1052. Доказать для полиномов Чебышева-Эрмита формулу

$$H_n(x) = (-1)^n \left[ (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - \dots \right].$$

1053. Полиномы Лагерра  $L_n(x)$  определяются формулой

$$[x^n e^{-x}]^{(n)} = e^{-x} L_n(x).$$

Доказать равенства:

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0, \\ L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0, \\ L_n(x) = (-1)^n \left[ x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \dots \right].$$

1054. Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  определяются равенством

$$[(x^2 - 1)^n]^{(n)} = P_n(x).$$

Доказать равенства:

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) - (4n+2)xP_n(x) + 4n^2P_{n-1}(x) = 0.$$

1055. Полиномы Чебышева  $T_n(x)$  определяются равенством

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \\ = \frac{1}{2^{n-1}} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]$$

(полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля). Доказать равенство:

$$(x^2 - 1) \frac{d^{m+2}T_n(x)}{dx^{m+2}} + (2m+1)x \frac{d^{m+1}T_n(x)}{dx^{m+1}} + (m^2 - n^2) \frac{d^m T_n(x)}{dx^m} = 0.$$

1056. Производная порядка  $n$  от  $\arcsin x$  имеет вид

$$p_n(x)(1-x^2)^{\frac{1-2n}{2}},$$

где  $p_n(x)$  — полином. Доказать равенство:

$$(1-x^2)p_n''(x) + (2n-3)xp_n'(x) - (n-1)^2p_n(x) = 0.$$

1057. Для полиномов предыдущей задачи доказать равенства:

$$p_{2m+1}(x) = A \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^m \frac{m^2(m-1)^2 \dots (m-\nu+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2\nu} (2x)^{2\nu} \right], \\ p_{2m}(x) = Ax \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(m-1)^2(m-2)^2 \dots (m-\nu)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} (2x)^{2\nu} \right].$$

Здесь  $A = [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)]^2$ .

1058. Справедливо равенство:  $\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n p_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$ , где  $p_n(x)$  — полином. Доказать равенства:

$$1) x^2 p_n'' - [(2n-2)x + 1] p_n' + n(n-1) p_n = 0,$$

$$2) p_n = 1 + \frac{n}{1}(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-1)(n-2)x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)(n-2)(n-3)x^3 + \dots$$

1059. Доказать равенство:  $\frac{d^n x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$ .

У к а з а н и е. Обозначая левую часть через  $u_n$ , доказать равенство:  $u_n = (n-1)u_{n-1} - u_{n-2}$  и применить полную индукцию.

1060. В равенстве  $\left[ \frac{1}{1+x^2} \right]^{(n)} = \frac{p_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$  числитель  $p_n(x)$  — полином степени  $n$ . Доказать равенства:

$$1) p_{n+1} + (2n+2)xp_n + n(n+1)(1+x^2)p_{n-1} = 0,$$

$$2) \frac{dp_n}{dx} + n(n+1)p_{n-1} = 0,$$

$$3) (1+x^2)p_n'' - 2xp_n' + n(n+1)p_n = 0.$$

1061. Для предыдущих полиномов доказать формулы:

$$p_{2m} = (-1)^m (2m)! \left[ \frac{(1+xi)^{2m+1} + (1-xi)^{2m+1}}{2} \right],$$

$$p_{2m-1} = (-1)^m (2m-1)! \left[ \frac{(1+xi)^{2m} - (1-xi)^{2m}}{2i} \right].$$

## § 7. Функции нескольких переменных. Их производные и дифференциалы

Следующие примеры показывают, что понятия предела и непрерывности для функций нескольких переменных несколько сложнее, чем для одного переменного.

1062. Показать, что  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$ .

1063. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x-y)^4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x-y)^4},$$

а величина  $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x-y)^4}$  всё же смысла не имеет.

1064. Показать, что если  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$  так, что отношение  $\frac{y}{x}$  имеет любое данное постоянное значение, то  $\frac{1}{1 + (x^2 - y)} \rightarrow 0$ .



В то же время эта величина может не стремиться ни к какому пределу, если отношение  $\frac{y}{x}$  не постоянное.

1065. Показать, что  $f(x)$ , определённая равенством

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m n! 2\pi x,$$

равна 1, если  $x$  — рациональное число, и 0, если  $x$  — иррациональное число.

1066. Показать, что в любой окрестности точки  $(0, 0)$  функция  $f(x, y)$ , определённая равенствами

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ при } x^2 + y^2 > 0,$$

принимает всякое значение в интервале  $(-1, 1)$ . При этом под окрестностью точки  $(0, 0)$  подразумевается любая область (круг, прямоугольник и т. п.), содержащая точку  $(0, 0)$  внутри.

1067. Функция определена равенствами:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ при } x^2 + y^2 > 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Показать, что эта функция непрерывна относительно каждой из переменных  $x$  и  $y$  в отдельности, не будучи в окрестности точки  $(0, 0)$  непрерывной функцией обеих переменных при их совместном изменении.

1068. Показать, что функция, определённая при  $x^2 + y^2$  равенством  $f(x, y) = e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}$ , принимает любое вещественное значение, кроме нуля, в любой области, внутри которой содержится точка  $(0, 0)$ .

В следующих примерах найти частные производные от указанных функций.

1069.  $u = x^3 + y^3 - 3xy.$

1070.  $u = 2x^3 - 3x^2y + 3y^3.$

1071.  $u = xy + xz + yz.$

1072.  $u = xy.$

1073.  $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z.$

1074.  $u = e^{xy}.$

1075.  $u = \arctg \frac{x}{y}.$

1076.  $u = xy - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}.$

1077.  $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz.$

1078.  $u = (xy)^z.$

1079.  $u = z^{xy}.$

Найти полные дифференциалы от функций:

1080.  $u = \sin(x^2 + y^2).$

1081.  $u = \arctg \frac{x}{y}.$

1082.  $u = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$

1083.  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

1084.  $u = \ln(x + y + z).$

1085.  $u = x^y.$

Если при увеличении всех переменных в  $t$  раз функция умножается на  $t^n$ , то она называется однородной функцией измерения  $n$ . Так, например, если

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),$$

то  $f(x, y, z)$  — однородная функция измерения  $n$ . По теореме Эйлера, если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — однородная функция степени  $n$ , то имеет место равенство

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = n f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Проверить на следующих примерах теорему Эйлера непосредственным вычислением производных:

$$1086. u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{x}{y}. \quad 1087. u = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{z}}.$$

$$1088. u = \sin \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \quad 1089. u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$1090. u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad 1091. u = \arctg \frac{x}{y}.$$

Найти частные производные в следующих примерах:

$$1092. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

$$1093. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad u = \arctg \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$1094. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad u = x \sin(x+y) + y \cos(x+y).$$

$$1095. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \text{ если } u = x^y.$$

$$1096. \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \text{ если } u = \ln(x+y).$$

$$1097. \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \text{ если } u = \ln(x^2 + y^2).$$

$$1098. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \text{ если } u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$1099. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ если } u = e^{xyz}.$$

Найти дифференциалы в следующих примерах:

$$1100. d^2 u, \text{ если } u = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7.$$

$$1101. d^2 u, \text{ если } u = x^2 y^2.$$

$$1102. d^2 u, \text{ если } u = e^{xy}.$$

$$1103. d^2 u, \text{ если } u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

$$1104. d^2 u, \text{ если } u = \sin(x+y+z).$$

$$1105. d^4 u, \text{ если } u = x^4 + 4x^3 y + 2x y^2 z - 3x y z^2 + z^4.$$

$$1106. d^4 u, \text{ если } u = x^4 - 3x^2 y^2 + y^4 + 5xy - x^3 - y^3 + x^2 - xy + y^2 + 2x - 5y.$$

$$1107. d^4 u, \text{ если } u = x^4 + 3x^3 y + z^4 - x^2 y + z^3.$$

1108.  $d^3u$ , если  $u = xuz$ .

1109.  $d^4u$ , если  $u = \ln(2x + 3y - z)$ .

Найти частные производные, вычислив сначала полные дифференциалы нужного порядка.

1110.  $u = \sin(2x + y)$ ;  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  и  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$ .

1111.  $u = \cos(x + y)$ ;  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ .

1112.  $u = \ln(ax + by + cz)$ ;  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  и  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ .

1113.  $u = e^{x+2y+3z}$ ;  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  и  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ .

Найти полные дифференциалы первых двух порядков для сложных функций в следующих примерах:

1114.  $u = \varphi(t)$ , где  $t = xy$ .

1115.  $u = \varphi(t)$ ;  $t = x^2 + y^2$ .

1116.  $u = \varphi(t)$ , где  $t = x^2 + y^2 + z^2$ .

1117.  $u = \varphi(\xi, \eta)$ ;  $\xi = ax + by + cz$ ,  $\eta = a_1x + b_1y + c_1z$ .

1118.  $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ ;  $\xi = ax$ ,  $\eta = by$ ,  $\zeta = cz$ .

Найти производные первых двух порядков от функций

1119.  $u = \varphi(\xi, \eta)$ , где  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$ .

1120.  $u = \varphi(\xi, \eta)$ , где  $\xi = x^2 + y^2$ ,  $\eta = xy$ .

1121. Найти производные порядка  $n$  от  $u = \varphi(t)$ , где  $t = ax + by + cz$ .

1122. Найти  $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ , если  $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $\xi = ax$ ,  $\eta = by$ ,  $\zeta = cz$ .

1123. Полагая  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , найти  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{array} \right|$ .

1124. Полагая  $x = \rho \sin \varphi \cos \psi$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \psi$ ,  $z = \rho \cos \varphi$ , вычислить величину функционального определителя (якобиана)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \psi)} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{array} \right|.$$

1125. Положив  $r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi$ , найти  $\frac{D(\rho, \varphi, \psi)}{D(\rho, r, \psi)}$ .

1126. Полагая  $x = \xi\eta\zeta$ ,  $y = \xi\eta - \xi\eta\zeta$ ,  $z = \eta - \xi\eta$ , найти якобиан  $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ .

1127. Доказать, что при  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi \cos \theta$ ,  
 $z = \sin \varphi \sin \theta \cos \psi$  якобиан равен  $-\sin^3 \varphi \sin^2 \theta \sin \psi$ .

1128. Доказать, что при  $u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-r^2}}$ ,  $u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{1-r^2}}$ ,  $u_3 =$   
 $= \frac{x_3}{\sqrt{1-r^2}}$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , справедливо равенство:

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = (1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

1129. Доказать, что

$$\frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Здесь  $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$  — функция с непрерывными вторыми производными.

1130. Доказать, что для однородных функций  $\varphi(x, y, z)$  измерения  $n$  справедливо равенство:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^m \varphi = n(n-1) \dots (n-m+1) \varphi.$$

1131. Функция, называемая потенциалом шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , определяется равенствами:

$$u = 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2) \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 < a^2,$$

$$u = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2.$$

Проверить, что  $u$  и её первые производные непрерывны при любых  $x, y$  и  $z$  и что лапласиан

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ или } -4\pi,$$

смотря по тому, лежит ли точка  $M(x, y, z)$  вне шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  или внутри его.

1132. Проверить равенство

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^3 u = 0, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Проверить следующие равенства:

$$1133. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}; \quad u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz).$$

$$1134. \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2} \text{ при } z = y\varphi(x^2 - y^2).$$

$$1135. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u \text{ при } u = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1136.  $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$  при  $z = e^y \varphi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^3}}\right)$ .
1137.  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$ , если  $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ .
1138.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$ .
1139.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , если  $u = \ln(x^2 + y^2)$ .
1140.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , если  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .
1141.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$ , если  $u = \frac{1}{r}(Ae^{-ar} + Be^{ar})$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
1142.  $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x \partial y} = 2z$ , если  $z = \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(y)]^2}$ .
1143.  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , если
- $$u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$
1144.  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = n^2 u$ , где
- $$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$
1145.  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$ , где
- $$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$
1146.  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , если  $u = f(x + \varphi(y))$ .
1147.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , если  $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ .
1148.  $a^2 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = b^2 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$ , где
- $$u = \varphi(ay + bx) \psi(bx - ay).$$

**З а м е ч а н и е.** В ответах на большинство задач от 1134 до 1148 содержатся неопределённые функции  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $\psi(x + at)$  и т. д. Эти функции могут выбираться произвольно из числа функций, имеющих нужные в данной задаче производные. Сами же эти задачи содержат решения уравнений в частных производных, встречающихся в вопросах математической физики.

## § 8. Дифференцирование неявных функций

Уравнение  $f(x, y) = 0$ , имеющее решением пару чисел  $(x_0, y_0)$ , определяет в окрестности числа  $x_0$  величину  $y$  как функцию от  $x$ , если частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  отлична от нуля в точке  $(x_0, y_0)$  и непрерывна в её окрестности. Последовательные производные от  $y$  по  $x$  могут быть получены из равенств:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} y''' = 0.\end{aligned}$$

Подобным путём можно вычислять и производные от неявных функций, заданных одним уравнением с несколькими переменными.

Если несколько неявных функций заданы несколькими уравнениями, то при вычислении производных иногда удобно пользоваться дифференциалами. При этом следует иметь в виду, что дифференциалы высших порядков от тех переменных, которые приняты за независимые, равны нулю.

1149.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ . Найти  $y'$  при  $x = y$ .

1150.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ . Найти  $x$ , при котором  $y' = 0$ .

1151.  $x^y = y^x$ . Найти  $y'$  при  $x \neq y$ .

1152.  $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ . Найти  $y'$ .

1153.  $x = y - a \sin y$ . Найти  $y'$  и  $y''$ .

1154.  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ . Найти  $y'''$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

1155. Доказать, что при  $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$  имеет место равенство  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$ .

1156. Доказать, что при  $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$  имеет место равенство

$$\frac{dx}{a + 2bx + cx^2} = \frac{dy}{a + 2by + cy^2}.$$

1157.  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ . Считая здесь  $x$  независимой переменной, а  $y$  — функцией, взять четвертую производную от обеих частей уравнения.

1158. В уравнении  $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$  формула  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$  не даёт возможности найти  $y'$ ; однако,  $y'$  можно найти и здесь из формулы

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Найти  $y'$ .

1159.  $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ . Найти  $y'$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

1160. Тот же вопрос для уравнения  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

1161. Даны уравнения  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ ,  $y^2 - 2x + z = 0$ . Найти  $y'$  и  $z''$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ .

1162. Из уравнений  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ,  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  найти  $d^2y$  и  $d^2z$ , если  $x$  — независимое переменное.

1163. Из уравнений  $x^2 + y^2 = 2z^2$ ,  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$  найти  $\frac{dx}{dz}$  и  $\frac{d^2y}{dz^2}$  в точке  $(1, -1, 1)$ , если  $z$  — независимое переменное.

1164.  $x + y + z = a$ ,  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ . Найти производные от  $y$  и  $z$ .

1165. В точке  $(1, 1, -2)$  найти производные от  $y$  и  $z$ , если  $x + y + z = 0$ ,  $x^3 + y^3 - z^3 = 10$ .

1166.  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

1167.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

1168.  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

1169.  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

1170.  $xy + xz + yz = 1$ . Найти  $dz$  и  $d^2z$ .

1171. При том же уравнении найти  $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ .

1172.  $xu + yv = 0$ ,  $uv - xy = 5$ ; при  $x = 1$ ,  $y = -1$  принимаем  $u = v = 2$ . Найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ .

1173.  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = kt^2$ . Найти производные от  $x$  и  $y$  по  $z$ .

1174.  $x = a \cos u \sin v$ ,  $y = b \cos u \cos v$ ,  $z = c \sin u$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные от неизвестной функции. Нахождение этой функции представляет вообще трудную задачу; мы будем её рассматривать во второй части. В следующих семи задачах дело идёт о более лёгком вопросе. В нем предлагается проверить, что указанные функции удовлетворяют данным уравнениям.

1175. Показать, что  $z$ , определённая как функция от  $x$  и  $y$  уравнением  $x - az = \varphi(y - bz)$ , где  $\varphi$  — любая функция, имеющая производную, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

называемому уравнением цилиндрических поверхностей.

1176. Показать, что  $z$ , заданный как функция от  $x$  и  $y$  уравнением  $z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ , удовлетворяет уравнению конических поверхностей

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

1177. Показать, что при соблюдении уравнений  $z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$ ,  $0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)$ ,  $z$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

1178. Показать, что при  $y = x\varphi(z) + \psi(z)$  удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

1179. Функция  $z$  от  $x$  и  $y$  задана уравнениями:

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \quad [z - \varphi(\alpha)] \varphi'(\alpha) = \alpha x^2.$$

Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

1180. Даны уравнения:

$$z = \frac{\psi(\alpha)}{(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)} + \frac{1}{x + \alpha}, \quad y + \ln[(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)] = 0.$$

Показать, что

$$\left( z - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

## § 9. Замена переменных

Иногда приходится менять роль переменных, принимая за неизвестные переменные те, которые раньше считались функциями. От этого выражения, содержащее производные, обыкновенно меняют вид.

Если независимое переменное  $x$  заменяется новым независимым переменным  $t$  с помощью равенства  $x = \varphi(t)$ , то удобнее всего пользоваться формулами

$$y' = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{dy}{dt}; \quad y'' = \frac{1}{\varphi'(t)} \left[ \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right]'; \quad y''' = \frac{1}{\varphi'} \left\{ \frac{1}{\varphi'} \left[ \frac{1}{\varphi'} \frac{dy}{dt} \right]' \right\}'; \dots$$

Здесь в левых частях производные взяты по  $x$ , а в правых частях производные берутся по  $t$ .

В частности, если за новую переменную берётся  $y$ , то, полагая  $x = \varphi(y)$ , можем применить прежние формулы, где теперь

$$\frac{dy}{dt} = 1; \quad \varphi(t) = x; \quad \varphi'(t) = x', \dots$$

Таким образом получаются равенства:

$$y' = \frac{1}{x'}; \quad y'' = \frac{x''}{x'^3}; \quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}; \dots$$

1181. Принять  $y$  за новое независимое переменное и преобразовать уравнение  $y'' - xy'^3 + 3y'y'^3 = 0$ .

1182. Преобразовать уравнение  $y'y'' - 3y'^2 = 0$ , приняв независимое переменное  $x$  за функцию от  $y$ .

1183. Таким же образом преобразовать уравнение:

$$y'^2 y^{IV} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$



1184. В уравнении  $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2y = 0$  положить  $x = \cos t$ .

1185. В уравнении  $x^2y'' + 3xy' + y = 0$  положить  $x = e^t$ .

1186. В уравнении  $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$  положить  $t = \ln x$ .

1187. В уравнении  $(x + a)^3y''' + 3(a + x)^2y'' + (a + x)y' + by = 0$  положить  $\ln(a + x) = t$ .

1188. В уравнении  $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$  положить  $x = \operatorname{tg} t$ .

1189. Показать, что подстановкой  $x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} 2t$  уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \frac{dy}{dx} + \frac{4m^2y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0$$

преобразуется в такое:

$$y'' + 4m^2y = 0.$$

1190. Подстановкой  $x = \sqrt{1 - t^2}$  преобразовать уравнение

$$(x - x^3)y'' + (1 - 3x^2)y' - xy = 0.$$

Доказать, что новое уравнение будет того же вида, что и прежнее.

1191. Преобразовать уравнение

$$(1 - x^2)^2y''' - 2x(1 - x^2)y' + \frac{2xy}{1 - x} = 0,$$

положив  $x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ .

В следующих задачах удобно воспользоваться формулами, выражающими производные через дифференциалы и независимые от выбора аргумента:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{dx^3}, \quad \dots$$

1192. Преобразовать выражение  $\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}$  к полярным координатам, положив  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

1193. Тот же вопрос для выражения  $\frac{x + yy'}{xy' - y}$ .

1194. Тот же вопрос для выражения  $\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ .

1195. В уравнении  $(1 - x^2)^2(a - y'') = by$  положить

$$x = \operatorname{th} \xi, \quad y = \frac{a\eta}{\operatorname{ch} \xi},$$

где  $\xi$  — аргумент, а  $\eta$  — функция.

1196. В уравнении  $2y'' + (x + y)(1 - y')^3 = 0$  положить  $x - y = u$ ,  $x + y = v$ , приняв  $u$  за аргумент, а  $v$  — за функцию.

1197. Преобразовать уравнение  $y'' = \frac{A}{(x - a)^2(x - \beta)^2} y$ , положив  $u = \frac{y}{x - \beta}$ ,  $t = \ln \frac{x - a}{x - \beta}$  и приняв  $t$  за аргумент, а  $u$  — за функцию.

1198. Переменное  $x$  есть функция от  $t$ . Вместо него вводится новая функция с помощью дробно-линейной подстановки  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ , где  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Доказать равенство:

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2} \left( \frac{x''}{x'} \right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2$$

(Шварц).

Указание. Полезно свести вопрос к случаю подстановки  $y = \frac{1}{x}$ . В этом случае равенство  $xy = 1$  следует трижды продифференцировать по  $t$ .

1199. В уравнении  $9y''^2y^v - 45y''y'''y^{iv} + 40y''''^3 = 0$  переменные  $x$  и  $y$  подвергаются гомографическому преобразованию по формулам:

$$y = \frac{a_1X + b_1Y + c_1}{aX + bY + c}, \quad x = \frac{a_2X + b_2Y + c_2}{aX + bY + c}.$$

Доказать, что вид уравнения не изменится.

В следующих задачах требуется преобразовать выражение, содержащее частные производные по  $x$  и по  $y$ , вводя новые независимые переменные. Если новые переменные даны равенствами  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ , то по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Эти равенства позволяют от производных по  $x$  и по  $y$  перейти к производным по  $u$  и  $v$ . Следуя тому же пути дальше, можно выразить и производные высших порядков.

1200. В уравнении  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  ввести новые независимые переменные  $u$  и  $v$ , положив  $u = x$ ,  $v = x^2 + y^2$ .

1201. В уравнении  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$  положить  $u = x$ ,  $v = \frac{y}{x}$  и принять  $u$  и  $v$  за новые независимые переменные.

1202. Такой же вопрос для уравнения

$$(x + mz) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + nz) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

где  $u = x$ ,  $v = \frac{y + nz}{x + mz}$ .

Преобразовать к полярным координатам, положив  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , следующие выражения:

$$1203. \quad w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$1204. \quad w = x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$1205. \quad w = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

$$1206. \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$1207. \quad w = y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Приняв  $u$  и  $v$  за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$1208. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; u = y + ax, v = y - ax.$$

$$1209. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0; 2x = u^2 - v^2, y = uv.$$

$$1210. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z^2 = 0; x = uv, y = \frac{1}{v}.$$

1211. При помощи подстановки вида  $u = x + \alpha y, v = x + \beta y$  преобразовать уравнение  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (a + b) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + ab \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  к виду  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ .

Приняв  $u$  и  $v$  за новые независимые переменные, а  $w$  — за новую функцию, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

$$1212. \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}; u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y.$$

$$1213. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; u = x + y, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{x}.$$

$$1214. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; u = x + y, v = x - y, w = xy - z.$$

1215. Какой вид принимает уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$ , если  $u = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ?

1216. Тот же вопрос для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

1217. Какой вид принимает уравнение  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + aw = 0$ , если  $w = \varphi(u)$ , где  $u = (x - x_0)(y - y_0)$ ?

1218. Какой вид принимает уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0$ , если  $u = \varphi(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ?

1219. Выражения

$$\Delta_1 v = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \text{ и } \Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r \sin \theta \sin \varphi, y = r \sin \theta \cos \varphi, z = r \cos \theta.$$

1220. Если  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  и притом  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$ , то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right].$$

Доказать.

1221. Доказать, что, вводя новые переменные по формулам  $X = \frac{dy}{dx}$ ,  $Y = x \frac{dy}{dx} - y$ , получим, что  $x = \frac{dY}{dX}$ ,  $y = X \frac{dY}{dX} - Y$ .

1222. Преобразование Ампера состоит в том, что новые переменные вводятся формулами:

$$X = x, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = z - y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Доказать, что при этом получаются равенства:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = -y, \quad z = Z - Y \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

1223. Преобразование Лежандра состоит в том, что вместо переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  вводятся новые по формулам  $X = p$ ,  $Y = q$ ,  $Z = px + qy - z$ , где  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  и  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Доказать, что для производных от новых переменных получаются равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial X} &= x, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = y, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} &= \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = -\frac{s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \frac{r}{rt - s^2}, \end{aligned}$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$


---

# ОТДЕЛ IV

## ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

---

### § 1. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Возрастание и убывание функций и неравенства

**Теорема Ролля.** Если в интервале  $a < x < b$  производная  $f'(x)$  существует и  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(b-h)$ , то уравнение  $f'(x) = 0$  имеет по крайней мере один корень в том же интервале.

**Теорема Лагранжа.** Если в интервале  $a < x < b$  производная  $f'(x)$  существует и  $f(a) = \lim_{h \rightarrow +0} f(a+h)$ ,  $f(b) = \lim_{h \rightarrow +0} f(b-h)$ , то

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c),$$

где  $c$  — некоторое число в том же интервале.

**1224.** Доказать, что корни производной от полинома

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

вещественные, и указать пределы, между которыми они заключены.

**1225.** Доказать, что производная от полинома, все корни которого вещественны, не имеет мнимых корней.

**1226.** Доказать, что полином Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

имеет все корни вещественные и лежащие в интервале  $(-1, 1)$ .

**1227.** Доказать, что у полинома Лагерра

$$L_n(x) = \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n} e^x$$

все корни положительные.

**1228.** Доказать, что у полинома Эрмита-Чебышева  $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} e^{x^2}$  все корни вещественные.

**1229.** Существует равенство  $\frac{d^n \arctg x}{dx^n} = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$ , где  $P_{n-1}(x)$  — полином степени  $n-1$ . Доказать, что все корни этого полинома вещественны.

**1230.** При каких значениях  $x$  функция  $\frac{x}{1+x^2}$  возрастает?

**1231.** При каких значениях  $x$  функция  $x^3(1-x)$  убывает?

1232. Доказать, что функция  $x^n e^{-x}$ , где  $n > 0$ , возрастает при  $0 < x < n$  и убывает при  $x > n$ .

1233. Доказать, что при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  функция  $\frac{\sin x}{x}$  убывающая.

1234. Доказать, что при увеличении числа сторон периметр правильного вписанного многоугольника возрастает, а периметр описанного — убывает.

1235. Доказать с помощью теорем о возрастании функций, что  $(1 + \frac{1}{n})^n$  возрастает при любых  $n > 0$ .

Пользуясь формулой Лагранжа, доказать неравенства:

1236.  $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$  при  $b > a > 0$ .

1237.  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$  при  $x > 0$ .

1238.  $e^x > 1+x$ .

1239.  $e^x > ex$  при  $x > 1$ .

1240.  $x^5 |\ln x| < \frac{1}{6e}$  при  $0 < x < 1$ .

1241. Доказать теорему: если при  $x=0$  функции  $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$  обращаются в нуль, а функция  $\varphi^{(n)}(x)$  положительна при  $x > 0$ , то  $\varphi(x) > 0$  при положительных  $x$ .

1242. Доказать теорему: если

$$\varphi(0) = \psi(0), \varphi'(0) = \psi'(0), \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \psi^{(n-1)}(0)$$

и  $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$  при  $x > 0$ , то при положительных  $x$  справедливо неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

Доказать неравенства:

1243.  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$  при  $x > 0$ .

1244.  $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$  при  $x > 0$ .

1245.  $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

1246.  $x - \frac{x^3}{2} < \ln(1+x) < x$ ;  $x > 0$ .

1247. Непосредственным возведением в квадрат доказать неравенства

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 8.$$

1248. Доказать, что при  $0 < x < 1$  величина  $e^{2x}$  меньше, чем  $\frac{1+x}{1-x}$ .

1249. Доказать, что если  $p_n$  — периметр правильного вписанного, а  $P_n$  — правильного описанного многоугольника, то  $\frac{2}{3} p_n + \frac{1}{3} P_n$  больше длины окружности (Гюйгенс).

**1250.** Доказать, что у геометрической прогрессии с положительными слагаемыми сумма членов, равноудалённых от концов прогрессии, меньше суммы крайних членов.

**1251.** У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы, а все члены прогрессий положительны. Показать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

**1252.** Числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$  положительны, а точки

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

лежат на кривой  $y = \varphi(x)$ . Доказать, что если кривая выпукла вниз, то имеет место неравенство

$$\varphi\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) < \frac{m_1\varphi(x_1) + m_2\varphi(x_2) + \dots + m_n\varphi(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Если же кривая выпукла вверх, то знак неравенства меняется на обратный.

Следующие задачи сводятся к предыдущей. Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  в них положительны. Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  предполагаются положительными и такими, что среди них имеются неодинаковые.

**1253.** Доказать, что при  $m > 1$  справедливо неравенство:

$$(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n)^m < \alpha_1x_1^m + \alpha_2x_2^m + \dots + \alpha_nx_n^m,$$

где

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1.$$

**1254.** Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел меньше среднего квадратичного тех же чисел, т. е. что

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

**1255.** Доказать, что при  $m > 1$  и положительных числах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m < n^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m).$$

**1256.** Если числа  $\alpha$  и числа  $x$  положительны и  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , то справедливо неравенство

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n > x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

В частности, среднее арифметическое положительных чисел больше среднего геометрического тех же чисел. Доказать.

**1257.** При любых вещественных значениях коэффициентов  $a$ , и  $b$ , а также переменного  $x$  имеет место очевидное неравенство

$$\sum_{v=1}^n (a_vx + b_v)^2 \geq 0.$$

Исходя из него, получить неравенство Коши

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq \\ \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

В следующих задачах полезно применить преобразование координат.

1258. Доказать, что на окружности  $x^2 + y^2 = 1$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{a^2} \leq Ax^2 + Bxy + Cy^2 \leq \frac{1}{b^2},$$

если кривая  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$  есть эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ .

1259. Поверхность  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 1$  после соответственного поворота осей имеет уравнение  $A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 = 1$ , где  $A_1 < B_1 < C_1$ . Доказать неравенство

$$A_1 \leq \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq C_1.$$

## § 2. Нахождение наибольших и наименьших значений функций одного переменного

В дальнейшем под наибольшим значением функции подразумевается значение, большее всех достаточно близких соседних, и под наименьшим — меньшее всех достаточно близких соседних. Нахождение наибольших и наименьших значений, в собственном смысле слова, сводится к нахождению таких наибольших и наименьших значений по сравнению с соседними, а также к изучению значений функции на концах интервала, в котором она изучается. Основной признак, дающий возможность находить наибольшие или наименьшие (экстремальные) значения функции, доставляет следующая теорема:

Если при переходе через некоторое значение аргумента производная от функции меняет знак  $+$  на  $-$  (идя от меньших значений аргумента к большему), то функция получает наибольшее значение; если же знак производной переходит с  $-$  на  $+$ , то функция получает наименьшее значение.

Часто бывает удобен и другой критерий:

Если при некотором значении аргумента величина первой производной равна нулю, а вторая производная отрицательна, то функция имеет максимум; если первая производная равна нулю при положительном значении второй производной, то функция имеет минимум.

1260. Найти максимум функции  $y = 6x - x^2$ .

1261. Найти минимум функции  $y = x^2 - 8x$ .

1262. Найти экстремальные значения функции  $y = x^3 - 12x$ .

1263. Показать, что функция  $y = x^3(8 - x)$  имеет максимум при  $x = 6$  и не имеет экстремума при  $x = 0$ .

1264. Показать, что функция  $y = x^2 + \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{1}{x}$  имеет минимум при  $x = 0$ , хотя первая производная при переходе  $x$  через нуль не меняет знака ни с  $-$  на  $+$ , ни с  $+$  на  $-$ .

Найти экстремальные значения следующих функций.



1265.  $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ .      1266.  $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ .  
 1267.  $y = a + (x - b)^4$ .      1268.  $y = a + (x - b)^3$ .  
 1269.  $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ .  
 1270.  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ .      1271.  $y = (x - 4)^4 (x + 3)^3$ .  
 1272.  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ .      1273.  $y = x + \frac{1}{x}$ .  
 1274.  $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}, a > 0, b > 0$ .      1275.  $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ .  
 1276.  $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ .      1277.  $y = \frac{x^2}{x^4 + 4}$ .  
 1278.  $y = x \ln x$ .      1279.  $y = x^2 \ln x$ .  
 1280.  $y = x^x$ .      1281.  $y = x \ln^2 x$ .  
 1282.  $y = x^n e^{-x}$ .      1283.  $y = x^2 e^{-x^2}$ .  
 1284.  $y = e^x + e^{-x}$ .      1285.  $y = e^{-x} - e^{-2x}$ .  
 1286.  $y = x^3 \sqrt[3]{(x - 1)^2}$  при  $-2 \leq x \leq 2$ .  
 1287.  $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$ .      1288.  $y = e^x \cos x$ .  
 1289.  $y = \frac{\sin x}{1 - e^2 \cos^2 x}$  при  $e^2 < 1$  (рассмотреть два случая  $2e^2 > 1$  и  $2e^2 < 1$ ).  
 1290.  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x + a)}$  при  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ .  
 1291.  $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$ .  
 1292.  $y = \sin 3x - 3 \sin x$ .      1293.  $y = \arcsin \sin x$ .

Найти экстремальные значения функций  $y$ , заданных неявно следующими уравнениями:

1294.  $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$ .      1295.  $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$ .  
 1296.  $xy^3 - x^2y = 2a^5$ .  
 1297.  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ .  
 1298.  $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ .  
 1299.  $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 1 = 0$ .  
 1300.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  при  $x > 0$ .  
 1301.  $x^4 + y^4 - 4xy = 0$ .      1302.  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .

### § 3. Построение графиков функций

Графики, предлагаемые в этом параграфе, должны исследоваться с помощью теорем о возрастании функций, исследования экстремальных значений и направления выпуклости кривой, если это оказывается возможным.

1303.  $y = x^3 - 3ax$ .

1304.  $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$ .

$$1305. y = (x+1)^2(x-2). \quad 1306. y = \frac{x-1}{x^2+3x-4}.$$

$$1307. y = \frac{a^3}{a^2+x^2}. \quad 1308. y = Ae^{-\frac{x^2}{a^2}}.$$

$$1309. y = x^n e^{-\frac{x}{a}}, \quad n > 0, a > 0.$$

$$1310. y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}. \quad 1311. y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$1312. y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}. \quad 1313. y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}.$$

$$1314. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}. \quad 1315. y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}.$$

$$1316. y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \quad 1317. y = \frac{10 \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}.$$

$$1318. 2y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}.$$

$$1319. y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}.$$

$$1320. y = \pm x^2 \sqrt{x+1}. \quad 1321. y = (x+1)^3 \sqrt{x^2}.$$

$$1322. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$1323. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$1324. y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}. \quad 1325. y = \pm \frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

$$1326. y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}. \quad 1327. y = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1328. y = \pm \frac{x \sqrt{1-x}}{1+x}.$$

$$1329. ay = \pm x \sqrt{x(a-x)}, \quad a > 0.$$

$$1330. y^2 = x^3 + px + q \quad \text{при } 4p^3 + 27q^2 > 0.$$

$$1331. y^2 = x^3 + px + q \quad \text{при } 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

$$1332. y^2 = x^3 + px + q \quad \text{при } 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

$$1333. y = \cos^3 x + \sin^3 x. \quad 1334. y = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

$$1335. y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$$

$$1336. y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x. \quad 1337. y = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

$$1338. y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}. \quad 1339. y = \frac{\sin x}{x}. \quad 1340. y = \sin x^2.$$

$$1341. y = x \ln x. \quad 1342. y = x^2 \ln x. \quad 1343. y = \ln(x^2-1).$$

$$1344. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad 1345. y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{при } x \geq -1.$$

Изучение графиков соответствующих функций во многих случаях позволяет определить число вещественных корней уравнений, даже в случае наличия буквенных коэффициентов. Так, например, имея уравнение  $ae^x = x^3$ , переписываем его в таком виде:  $x^3 e^{-x} = a$ . После этого вопрос сводится к

определению числа точек пересечения прямой  $y = a$  и кривой  $y = x^3 e^{-x}$ . Ордината последней возрастает от  $-\infty$  до  $27e^{-3}$  при возрастании  $x$  от  $-\infty$  до 3. После этого она убывает до нуля при  $x$ , изменяющемся от 3 до  $+\infty$ . Отсюда следуют выводы: а) при  $a > 27e^{-3}$  уравнение не имеет вещественных решений; б) при  $a = 27e^{-3}$  уравнение имеет корень  $x = 3$  — это будет кратный корень; в) при  $0 < a < 27e^{-3}$  уравнение имеет два вещественных корня:  $0 < x_1 < 3$  и  $x_2 > 3$ ; г) при  $a < 0$  уравнение имеет один отрицательный корень.

Определить число вещественных корней уравнений:

$$1346. 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0.$$

$$1347. x^4 - 4ax^3 - 2 = 0. \quad 1348. 2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0.$$

$$1349. x \ln x = a. \quad 1350. \ln x = ax.$$

1351. Доказать, что уравнение  $x^3 + px + q = 0$  при вещественных  $p$  и  $q$  имеет один вещественный корень при  $4p^3 + 27q^2 > 0$  и три вещественных корня при  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .

1352. Доказать, что при  $a > 1$  уравнение  $a^x = bx$  имеет два вещественных корня при  $b > e \ln a$ , не имеет ни одного вещественного корня при  $e \ln a > b > 0$  и имеет один корень при  $b > 0$ .

Определить, при каких значениях параметра следующие уравнения имеют указанное число вещественных корней.

$$1353. 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + m = 0, \text{ два различных корня.}$$

$$1354. 2x^3 - 13x^2 - 20x + m = 0, \text{ один корень.}$$

$$1355. 3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + m = 0, \text{ четыре различных корня.}$$

$$1356. 2x^3 - 4x^2 - 30x + m = 0, \text{ два совпадающих корня и один простой.}$$

$$1357. x^2 + x + e^{-x} + m = 0, \text{ два совпадающих корня.}$$

$$1358. x^2 - x - \ln x + m = 0, \text{ ни одного корня.}$$

$$1359. 6 \operatorname{arctg} x - x^3 + m = 0, \text{ три корня, из которых два совпадающих.}$$

#### § 4. Разные задачи на наибольшие и наименьшие значения

1360. Определить наибольшую площадь прямоугольника с периметром  $4a$ .

1361. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса  $a$ .

1362. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в сегмент круга радиуса  $a$ , если центральный угол, замыкаемый сегментом, равен  $2\alpha$ .

1363. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в параболический сегмент, ограниченный параболой  $y^2 = 2px$  и прямой  $x = \frac{m^2}{2p}$ .

1364. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании  $a$  данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту  $h$ .

**1365.** По углам прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$  вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся крестообразной фигуры образована коробочка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается наибольший объём коробочки.

**1366.** Поперечное сечение бревна есть круг радиуса  $a$ . Из бревна вытёсывается брус с прямоугольным поперечным сечением. Прочность бруса пропорциональна основанию и квадрату высоты поперечного сечения. Найти форму поперечного сечения, при которой брус имеет наибольшую прочность.

**1367.** Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в сектор круга радиуса  $a$  с центральным углом  $2\alpha$ .

**1368.** Найти наибольший объём цилиндра, вписанного в шар радиуса  $a$ .

**1369.** Найти наибольший объём цилиндра, у которого периметр осевого сечения равен  $6m$ .

**1370.** Найти наибольшую боковую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса  $a$ .

**1371.** Найти наибольший объём цилиндра, вписанного в данный конус.

**1372.** Найти наибольший объём цилиндра, вписанного в сегмент параболоида  $ax = x^2 + y^2$ ,  $a > 0$ , ограниченный плоскостью  $z = h > 0$ .

**1373.** Найти наибольший объём конуса, вписанного в шар радиуса  $a$ .

**1374.** Найти наименьший объём конуса, описанного около полшара радиуса  $a$ .

**1375.** Найти наименьший объём конуса, описанного около шара радиуса  $a$ .

**1376.** Найти наибольший объём цилиндра, ось которого проходит по диагонали куба с ребром  $a$ , а основания которого касаются граней куба.

**1377.** Найти наибольший объём цилиндра, ось которого пересекает под прямым углом ось данного цилиндра с радиусом  $a$ , а основания которого касаются боковой поверхности данного цилиндра.

**1378.** Найти наибольший объём конуса с данной образующей  $l$ .

**1379.** Из сектора круга данного радиуса свёртывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объём?

**1380.** Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жолоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения жолоба будет наибольшей?

**1381.** Яркость освещения выражается формулой  $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$ , где  $\varphi$  — угол наклона лучей,  $r$  — расстояние от площадки до источника света,  $m$  — постоянная (сила источника света). На какой высоте  $h$  надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии  $a$  от столба было наибольшим?

**1382.** Точки движутся по осям координат со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . В начальный момент они занимали положения  $(a, 0)$  и  $(0, b)$ . Найти кратчайшее расстояние между точками.

1383. Найти кратчайшее расстояние от точки  $(x_1, y_1, z_1)$  до точек прямой  $x = a + lt, y = b + mt, z = c + nt$ .

1384. Точка перемещается в среде I со скоростью  $v_1$ , а в среде II со скоростью  $v_2$ . Линия раздела сред прямолинейна. Доказать, что перемещение движущейся точки из точки A в одной среде в точку B в другой среде совершается в кратчайшее время при условии, что путь состоит из прямолинейных отрезков AC и CB, где C — на границе двух сред, причём  $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы, образованные прямыми AC и CB с линией раздела.

1385. Точка движется по плоскости со скоростью  $v_1$ , а, попав на ось Oх, может двигаться со скоростью  $v_2 > v_1$ . Найти скорейший путь из точки A(0, a) в точку B(b, 0).

1386. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

1387. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравнивается силой f на другом конце. При этом на расстоянии a от точки опоры подвешен груз p, а вес единицы длины рычага равен m. Определить длину рычага x так, чтобы сила f была наименьшая.

1388. Из точек A и A<sub>1</sub> по прямым AO и A<sub>1</sub>O по направлению к точке O выходят одновременно два тела со скоростями v и v<sub>1</sub>. При этом AO = l, A<sub>1</sub>O = l<sub>1</sub>, а угол между AO и A<sub>1</sub>O равен α. Когда расстояние между телами наименьшее?

1389. Чашка имеет форму полушара радиуса a. В неё опущен стержень длины l > 2a. При каком положении стержня его середина находится ниже всего (положение равновесия)?

1390. Стержень длиной 2b опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклонённые к горизонту под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится выше всего?

1391. Светящаяся точка находится на линии центров двух шаров. При каком её положении сумма освещённых частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1392. К окружности проведены две касательные. Провести третью касательную так, чтобы треугольник, ограничиваемый касательными, имел наименьшую площадь.

1393. Через точку внутри прямого угла провести прямую так, чтобы её отрезок между сторонами угла был наименьшим.

1394. Сосуд с вертикальной стенкой высотой h стоит на горизонтальной плоскости. Из отверстия в стенке бьёт струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи наибольшая, если скорость вытекающей жидкости, по закону Торричелли, равна  $\sqrt{2gx}$ , где x — глубина отверстия.

1395. Через точку внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

1396. Доказать, что хорда, проходящая через данную точку внутри кривой и отсекающая сегмент наименьшей площади, делится в данной точке на две равные части.

1397. Плоскость, параллельная противоположным рёбрам тетраэдра, пересекает его по параллелограмму. Когда площадь этого параллелограмма наибольшая?

1398. Две стороны параллелограмма — на сторонах треугольника, а вершина — на третьей стороне. Когда площадь параллелограмма наибольшая?

1399. Прямой круговой конус пересекается плоскостью по параболическому сегменту. Площадь такого сегмента равна произведению  $\frac{2}{3}$  основания на высоту. Найти наибольшую площадь сегмента.

1400. К параболе провести нормаль, отсекающую от неё сегмент наименьшей площади.

1401. На частях  $AC$  и  $CB$  диаметра  $AB$  полуокружности, как на диаметрах, построены внутри данной полуокружности новые полуокружности. Где поместить точку  $C$ , чтобы круг, касающийся трёх полуокружностей, имел наибольший радиус?

1402. Верхним основанием правильной шестигранной призмы является шестиугольник  $ABCDEF$ . Через точку  $O$  на оси призмы, лежащую выше верхнего основания, и через диагонали  $AC$ ,  $CE$  и  $EA$  проведены три плоскости, пересекающие боковые рёбра призмы, не проходящие через  $A$ ,  $C$  и  $E$ , в точках  $B_1$ ,  $D_1$  и  $F_1$ . Объём многоугольника, ограниченного с боков и снизу гранями призмы, а сверху крышей  $OAB_1CD_1EF_1A$ , не зависит от выбора точки  $O$ . При каком условии поверхность многогранника будет наименьшей? (Задача о пчелиных сотах.)

## § 5. Ряды, их сходимость

Если при  $n \rightarrow \infty$  сумма  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  стремится к некоторому определённом конечному пределу  $s$ , то говорят, что ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  — сходящийся, а  $s$  — его сумма. В этом случае пишем:  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = s$ . Необходимое и достаточное условие сходимости ряда  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  состоит в том, что при любом положительном постоянном  $\epsilon$  можно найти такое  $n_0 = n_0(\epsilon)$ , что

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \epsilon$$

при всех  $n > n_0$  и любых положительных  $p$ .

Ряд не сходящийся называется расходящимся.

В следующих примерах можно установить сходимость ряда и величину его суммы непосредственно.

1403. Непосредственным делением по возрастающим степеням можно установить тождество:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Исходя из него, показать, что ряд

$$1 + x + x^2 + \dots$$

сходится при  $|x| < 1$  и его сумма равна  $\frac{1}{1-x}$ .

1404. Пользуясь тождеством  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} = \frac{1}{v(v+1)}$ , доказать, что ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

сходится и имеет сумму, равную единице.

1405. Доказать равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}.$$

1406. Доказать равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{4}.$$

1407. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v,$$

где предполагается, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ .

1408. Установив равенство

$$\frac{m}{(m+1)(m+2)} + \frac{m}{(m+2)(m+3)} + \frac{m}{(m+3)(m+4)} + \dots = \frac{m}{m+1},$$

доказать, что в данном случае при  $m \rightarrow \infty$  предел суммы ряда не равен сумме пределов членов ряда:  $\lim_{m \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)$  здесь равен 1, а

$$\lim u_1 + \lim u_2 + \lim u_3 + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Одним из способов изучения сходимости рядов является признак сравнения: если члены данного ряда  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося ряда положительных слагаемых  $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ , то данный ряд — сходящийся. В этом случае ряд называется абсолютно сходящимся.

Если ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Если же  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$  не стремится к нулю, то ряд расходящийся.

Исследовать сходимость следующих рядов при разных значениях переменного  $x$ :

1409.  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

1410.  $x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots$

$$1411. 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \dots$$

$$1412. \frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$1413. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$1414. \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots$$

$$1415. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1^2} + \frac{1}{x^2+2^2} + \dots$$

Указание. Воспользоваться неравенством:  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ .

Во многих случаях для изучения сходимости рядов полезен признак Даламбера: если, начиная с некоторого места, отношение последующего члена ряда к предыдущему по абсолютной величине меньше одной и той же правильной дроби  $q$ , т. е. если  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q$ , где  $q < 1$ , то ряд сходится (абсолютно). В частности: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ , то ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  сходится.

Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ , то ряд расходится.

Исследовать сходимость рядов:

$$1416. 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$1417. 1 + x + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + \dots$$

$$1418. x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$1419. x + \frac{2x^2}{3} + \frac{2^2x^3}{5} + \frac{2^3x^4}{7} + \dots$$

$$1420. x + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3^3}x^3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4^4}x^4 + \dots$$

$$1421. x + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}x^4 + \dots$$

$$1422. x + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}.$$

$$1423. \frac{1}{e^x - 1} + \frac{2}{e^{2x} - 1} + \frac{3}{e^{3x} - 1} + \dots$$

1424. Ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  составлен по следующему закону:  $u_n = \frac{1}{2^{n\sigma}}$ , где  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ ,  $\sigma$  — постоянное число. Доказать, что при  $\sigma > 1$  ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  сходится, а сумма его равна  $\frac{2^\sigma}{2^\sigma - 2}$ .

1425. Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что при  $\sigma > 1$  ряд  $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \dots$  сходится.



1426. Члены ряда составляются по правилу:

$$u_n = \frac{1}{2^{m\sigma}},$$

где  $2^{m-1} < n \leq 2^m$ ,  $\sigma$  — постоянное число.

Доказать, что при  $0 < \sigma < 1$  ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  расходится.

1427. Доказать, что ряд  $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \dots$  при  $0 < \sigma \leq 1$  расходится.

1428. Установить, что ряд  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$  расходящийся, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

В тех случаях, когда  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , признак Даламбера недостаточен. Если при этом дробь  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  равна отношению двух полиномов относительно  $n$ , то может быть полезно применение признака сходимости Гаусса:

Признак Гаусса. Если  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m}$ , то ряд сходится при  $b_1 - a_1 > 1$  и расходится при  $b_1 - a_1 \leq 1$ .

Исследовать сходимость рядов:

1429.  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

1430.  $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4} + \dots$

1431.  $1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \dots$

1432.  $1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots; m > 0.$

В обширном классе случаев, когда предыдущие признаки не дают возможности судить о сходимости рядов, можно убедиться в сходимости с помощью других признаков. Из них один, особенно важный, основан на тождестве Абеля

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \\ = \sigma_1 (b_1 - b_2) + \sigma_2 (b_2 - b_3) + \dots + \sigma_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + \sigma_n b_n, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

Признак сходимости Абеля: ряд  $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots$  сходится, если сумма  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  остаётся ограниченной при возрастании  $n$ , а числа  $v_1, v_2, v_3, \dots$  убывают и стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера.

Частный случай признака Абеля: знакопеременный ряд  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$  сходится, если величина  $u_n$  убывает при возрастании  $n$  и притом  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

Исследовать сходимость следующих рядов:

$$1433. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad 1434. 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$1435. 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots; m > 0.$$

$$1436. 1 - \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

$$1437. \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

$$1438. \cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} + \dots$$

$$1439. 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots$$

$$1440. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Если ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$  сходится, а ряд  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$ , составленный из абсолютных значений его членов, расходится, то данный ряд называется неабсолютно сходящимся. Следующие примеры показывают глубокую разницу в характере абсолютной и неабсолютной сходимости.

1441. Пользуясь основным критерием сходимости, доказать, что сумма абсолютно сходящегося ряда не изменится, если расположить те же члены ряда в любом другом порядке.

1442. Показать, что сумма неабсолютно сходящегося ряда не меняется, если члены ряда переставить так, что ни один из них не удаляется со своего места больше, чем на  $m$  мест, где  $m$  — любое заданное число.

1443. Показать, что сумма неабсолютно сходящегося ряда не меняется от группировки слагаемых, если члены не сдвигаются со своего места, а число членов в любой группе не превосходит заданного числа  $m$ .

1444. Доказать равенство

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ & = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots \right), \end{aligned}$$

показав тем самым, что у неабсолютно сходящихся рядов сумма существенно зависит от порядка слагаемых.

1445. Пользуясь равенствами

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= 1 - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \dots, \end{aligned}$$

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \dots = \\ = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}\right) + \dots,$$

доказать, что  $s < 1$ , а  $s_1 > 1$  и, следовательно,  $s_1 \neq s$ .

1446. Доказать, что ряд  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$  — сходящийся, а ряд  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ , полученный из первого перестановкой слагаемых, — расходящийся.

Если ряд, члены которого зависят от  $x$ , остаётся сходящимся в интервале  $a \leq x \leq b$ , то, написав равенство:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + R_n(x),$$

можем быть уверены, что  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  при любом данном  $x$ . Поэтому при любом данном  $\varepsilon > 0$  неравенство  $|R_n(x)| < \varepsilon$  будет выполняться, если  $n$  достаточно велико:  $n > n_0$ . При этом число  $n_0$ , вообще говоря, зависит не только от  $\varepsilon$ , но и от значения  $x$ . Если при любом данном  $\varepsilon > 0$  неравенство  $|R_n(x)| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x$  в интервале  $a \leq x \leq b$ , как только  $n > n_0$ , где  $n_0$  зависит лишь от  $\varepsilon$ , то ряд называется равномерно сходящимся. Для равномерно сходящихся рядов справедливы теоремы:

1) Предел суммы ряда равен сумме пределов членов ряда.

2) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.

3) Если ряд, составленный из производных от членов данного ряда, сходится равномерно, то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленного из производных от членов данного ряда.

4) Если члены данного ряда по абсолютной величине не больше, чем соответствующие члены сходящегося ряда положительных постоянных слагаемых, то ряд сходится равномерно.

1447. Доказать, что ряд

$$x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + \dots$$

сходится в интервале  $0 \leq x \leq 1$ , но неравномерно.

1448. Доказать, что ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

сходится при любом  $x$ , но неравномерно. Тот же ряд сходится равномерно в любом конечном интервале  $a \leq x \leq b$ .

1449. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$  сходится равномерно при любом  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

1450. Доказать, что ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots$$

можно дифференцировать почленно.

**1451.** Доказать, что ряд

$$\frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2x}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \dots$$

представляет непрерывную функцию от  $x$ .

**1452.** Пользуясь тождеством Абеля, доказать, что ряды

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots,$$

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

при выполнении условий

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

сходятся равномерно во всяком интервале, не заключающем ни внутри, ни на концах значений  $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

**1453.** Доказать, что сумма ряда

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{a^n}, \quad a > 1$$

представляет непрерывную функцию.

**1454.** Доказать, что при  $a > 2$  предыдущая сумма ряда имеет производную:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n \cos 2^n x.$$

**1455.** Доказать, что при  $1 < a < 2$  функция  $s(x)$  задачи 1453 не имеет производной (будучи, однако, непрерывной).

**У к а з а н и е.** Воспользоваться тождеством:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\sin 2^n x}{a^n} + \frac{\sin 2^n x}{a^n} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{a^n},$$

где  $n$  — любой выбранный номер, и изучать  $\frac{\Delta s(x)}{\Delta x}$ , при условии, что  $n \rightarrow \infty$  выбирая числа  $\Delta x$  особым образом в зависимости от выбора номера  $n$ .

## § 6. Разложение в ряды

**1456.** Непосредственным делением, расположенным по возрастающим степеням буквы  $x$ , доказать разложения в ряды:

$$\frac{1}{a-bx} = \frac{1}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} + \dots,$$

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} - \dots$$

$$|x| < \left| \frac{a}{b} \right|.$$

1457. Пользуясь тождеством  $\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}$ , доказать разложение в ряд:

$$\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \frac{5}{6} + \frac{13}{36}x + \frac{35}{216}x^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^{n-1} + \dots;$$

$$|x| < 2.$$

1458. Предполагая законным разложение в ряд

$$\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

и умножая обе части равенства на  $1-x-x^2$ , доказать, что  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5, \dots$  и вообще  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — числа ряда Фибоначчи, определяемые равенствами  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  при  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ .

1459. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x} \right],$$

найти формулу, дающую общий член  $a_n$  ряда Фибоначчи.

1460. Доказать, что в разложении в ряд дроби

$$\frac{a+bx+cx^2}{A+Bx+Cx^2+Dx^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

имеющем место при  $A \neq 0$  и при достаточно малых значениях  $|x|$ , между коэффициентами  $a_n$  существует соотношение:  $Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} + Da_{n-3} = 0$ ;  $n \geq 2$ .

Важное средство для разложения функций в ряд дают формулы Тейлора и Маклорена. Формула Тейлора может быть записана в таком виде:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) +$$

$$+ \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} (x-a)^{n-1} + R_n.$$

Здесь  $R_n$  — остаточный член, применяемый в двух видах:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \dots n} (x-a)^n \quad (\text{форма Лагранжа}),$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} (x-c)^{n-1} (x-a) \quad (\text{форма Коши}).$$

В обоих случаях  $c$  означает некоторое среднее между числами  $a$  и  $x$ . Функция  $f(x)$  предполагается имеющей в интервале между  $a$  и  $x$  производную  $n$ -го порядка.

Формула Маклорена получается из формулы Тейлора при  $a=0$  и имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} x^{n-1} + R_n$$

При этом

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n \quad (\text{форма Лагранжа}),$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} x (x-c)^{n-1} \quad (\text{форма Коши}).$$

Здесь  $c$  — некоторое среднее между числами 0 и  $x$ .

В формулах Тейлора и Маклорена величина  $n$  может выбираться произвольно, если  $f(x)$  имеет производные нужного порядка во всех точках интервала  $(a, x)$ .

Если  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то из этих формул получаются ряды Тейлора и Маклорена, имеющие вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} (x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Сходимость этих рядов следует из условия:  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , но не обратно. Следует заметить, что исследование условий, при которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ , удаётся лишь в сравнительно простых случаях. По счастью, теория функций комплексного переменного даёт простое решение вопроса о законности рядов Тейлора и Маклорена для широкого класса функций.

Следующие пять разложений получаются из ряда Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Первые три из них справедливы при всяком значении  $x$ . Два последних справедливы при  $|x| < 1$ . При  $|x| > 1$  последнее лишено смысла, так как ряд расходится. Формула для  $(1+x)^m$ , называемая биномом Ньютона, при  $|x| > 1$  справедлива лишь тогда, когда  $m$  — целое положительное или нуль. К указанным пяти рядам по простоте и важности можно присоединить шестой ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Непосредственное получение его из ряда Маклорена несколько затруднительно, и другие приёмы ведут к цели легче. Один из них покажем на примере функции  $y = \operatorname{arcsin} x$ . Дифференцируя это равенство и освобождаясь от знаменателя, получаем:  $\sqrt{1-x^2} y' = 1$ . Беря ещё раз производную и опять освобождаясь от знаменателя, приходим к равенству:

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0. \quad (*)$$

Оно представляет так называемое дифференциальное уравнение для функции  $y = \arcsin x$ . Предполагая, что разложение  $y$  по степеням  $x$  существует, напомним:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Так как для степенных рядов допустимо почленное дифференцирование, то отсюда следуют равенства:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (\*), получаем:

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0.$$

Группируя члены по степеням  $x$ , что тоже для степенных рядов законно, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось, необходимо должно быть

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_{n+2} = \frac{n^2 a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Исходя отсюда, можно найти все  $a_n$ , если знать  $a_0$  и  $a_1$ . Но разложение  $\arcsin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  должно совпадать с рядом Маклорена для  $\arcsin x$ . Поэтому  $a_0$  и  $a_1$  равны значениям  $\arcsin x$  и  $(\arcsin x)'$  при  $x=0$ , т. е.  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ . Отсюда следуют равенства:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \quad a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \dots, \\ a_3 &= \frac{1^2 a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{3^2 a_3}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}, \\ a_7 &= \frac{5^2 a_5}{6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\arcsin x$  разлагается в ряд по степеням  $x$ , то должно быть:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

По признаку Даламбера ряд сходится при  $|x| < 1$ . То, что  $\arcsin x$  действительно разлагается в ряд, с лёгкостью даёт теория функций комплексного переменного.

1461. Разложить по степеням  $x-2$  полином

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2.$$

1462. Разложить по степеням  $x+1$  полином

$$x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1.$$

1463. Доказать равенства:

$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$

$$\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$

разложив левые части по степеням  $x$ .

**1464.** В разложении для  $\ln(1+x)$  заменить  $x$  на  $-x$  и, исходя из рядов для  $\ln(1+x)$  и  $\ln(1-x)$ , получить ряд Грегори:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]; \quad |x| < 1.$$

**1465.** Получить равенство:

$$\ln(N+1) - \ln N = 2 \left[ \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots \right];$$

$$N > 0.$$

**1466.** Из ряда для  $e^x$  получить разложение для  $e^{-x}$ , а также разложения:

$$\operatorname{ch} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

годные при всяком  $x$ .

**1467.** Пользуясь биномом Ньютона, получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots; \quad |x| < 1.$$

**1468.** Доказать, что при  $|x| < 1$  справедливы равенства:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n.$$

**1469.** Доказать равенство:

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n.$$

Здесь, как и в других случаях, считается, что  $0! = 1$ .

**1470.** Доказать равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{a^7} + \dots; \quad |x| < a.$$

**1471.** Доказать равенство:

$$(a+x)^n = a^n + nxa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 a^{n-2} + \dots; \quad |x| < a.$$

Разложить по степеням  $x$  следующие функции:

**1472.**  $\sqrt{1+x}$ .

**1474.**  $\ln(1-x+x^2)$ .

**1473.**  $\ln \frac{a+x}{a-x}$ .

**1475.**  $\ln(a+x)$ .



$$1476. \ln(2 - 3x + x^2).$$

$$1477. \frac{(1+x)^4}{x} \ln(1+x).$$

1478. Доказать, что при  $|x| < 1$  справедливо равенство:

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

С помощью подходящей замены переменной получить следующие разложения в ряды:

$$1479. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right]; \quad |x| > 1.$$

$$1480. \ln x = 2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]; \quad x > 0$$

$$1481. \frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{x}{x+1} \right)^3 + \dots;$$

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Получить следующие разложения в ряды:

$$1482. \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$|x| < 1.$$

$$1483. \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \dots;$$

$$|x| < 1.$$

$$1484. (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{3} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^8}{4} + \dots; \quad |x| < 1.$$

$$1485. \sin(\mu \arcsin x) =$$

$$= \frac{\mu}{1} x - \frac{\mu(\mu^2-1)}{3!} x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{5!} x^5 - \dots; \quad |x| < 1.$$

$$1486. \cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!} x^4 - \dots; \quad |x| < 1.$$

$$1487. e^{x \operatorname{ctg} a} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{\sin^2 na} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

$$1488. \ln(1 - 2x \cos \varphi + x^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} x^n; \quad |x| < 1.$$

$$1489. (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arctg} x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{m(m-1)\dots(m-2\nu)}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1}; \quad |x| < 1.$$

$$1490. (1+x^2)^{-\frac{m}{2}} \cos(m \operatorname{arctg} x) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{m(m+1) \dots (m+2v-1)}{(2v)!} x^{2v}; \quad |x| < 1.$$

$$1491. e^{m \operatorname{arcsin} x} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{m(m^2+1^2)(m^2+3^2) \dots (m^2+(2v-1)^2)}{(2v+1)!} x^{2v+1} + \\ + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2) \dots (m^2+4v^2)}{(2v+2)!} x^{2v+2}; \quad |x| < 1.$$

## § 7. Ряды и действия с ними

1492. Найти сумму ряда  $s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ , воспользовавшись равенством:

$$\begin{array}{r} s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ \quad x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ \quad \quad x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ \quad \quad \quad x^3 + x^4 + x^5 + \dots \\ \quad \quad \quad \quad x^4 + x^5 + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad x^5 + \dots \end{array}$$

1493. Найти сумму ряда  $s = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$ , составив произведения  $xs$  и  $x^2s$ .

1494. Заметив, что коэффициенты ряда

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots$$

связаны соотношением:  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$ , где  $a_n$  — коэффициент при  $x^n$ , найти сумму ряда умножением её на  $1 - 2x + x^2$ .

1495. У ряда

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \dots$$

каждый следующий коэффициент равен сумме трёх предыдущих. Найти сумму ряда.

1496. Перемножить два ряда:

$$s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad \text{и} \quad s_1 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

1497. Непосредственным умножением доказать, что

$$(1+x)s_m(x) = s_{m+1}(x),$$

$$\text{где } s_m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

1498. Перемножением рядов доказать равенство:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right) \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right) = \\ = 1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x+y)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

1499. Доказать равенство:

$$\frac{1}{2x(1-x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} = 1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^2 + \\ + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^4 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)x^6 + \dots; \quad |x| < 1,$$

перемножая ряд для  $\frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}$  на ряд для  $\frac{1}{1-x^2}$ .

Найти прямым дифференцированием производные от рядов:

1500.  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots; \quad |x| < 1.$

1501.  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots; \quad |x| < 1.$

1502.  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$

1503.  $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

1504. Доказать, что сумма гипергеометрического ряда Гаусса

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots; \\ |x| < 1$$

удовлетворяет уравнению:

$$x(x-1)y'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)x]y' + \alpha\beta y = 0,$$

где

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

1505. Функция Бесселя  $I_0(x)$  определяется рядом

$$I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Доказать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

1506. Доказать, что

$$y = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + xy = 0.$$

1507. Замечая, что  $\sec x$  — чётная функция, можем заключить, что разложение  $\sec x$  имеет вид:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

где  $E_n$  — соответствующие коэффициенты (числа Эйлера). Умножая почленно на равенство

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m},$$

получить рекуррентную формулу для чисел Эйлера:

$$\frac{E_n}{(2n)!} - \frac{E_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{E_{n-2}}{4!(2n-4)!} - \dots = 0.$$

Так как  $E_0 = 0$ , то из этой формулы следует, что

$$E_1 = 1, E_2 = 5, E_3 = 61, E_4 = 1385, \dots$$

**1508.**  $1 - \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sum \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$ , где  $B_n$  — коэффициенты (называемые числами Бернулли). Доказать, что для чисел Бернулли существует рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{2(2n)!} - \frac{B_{n-1}}{2^3 3!(2n-2)!} + \frac{B_{n-2}}{2^5 \cdot 5!(2n-4)!} - \dots + \\ + \frac{(-1)^{n-1} B_1}{2^{2n-1} (2n-1)! 2!} + \frac{(-1)^{n-2} B_0}{2^{2n} (2n)!} = 0. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, \dots$$

Написать первые пять членов разложения по степеням  $x$  для следующих функций:

**1509.**  $\ln(1 + e^x).$

**1511.**  $e^{\sin x}.$

**1510.**  $(1 + x)^x.$

**1512.**  $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}.$

**1513.** Доказать, что при малости величины  $\frac{b}{a^2}$  приближённое равенство  $\sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}$  имеет погрешность, приблизительно равную  $\frac{a}{8} \left( \frac{b}{a^2} \right)^2$ , и вычислить с помощью этого равенства значения радикалов:

а)  $\sqrt{2}$ , б)  $\sqrt{24}$ , в)  $\sqrt{84}$ , г)  $\sqrt{235}$ , д)  $\sqrt{240}$ .

**1514.** Доказать приближённую формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \cong a + \frac{x}{na^{n-1}}$$

и вычислить с её помощью корни:

$$\sqrt[5]{245}, \sqrt[7]{129}, \sqrt[9]{515}, \sqrt[10]{1027}.$$

**1515.** Существует следующая приближённая формула для извлечения корней:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} \cong a + \frac{2ab}{2nN - (n+1)b},$$

где  $a^n$  — точная степень, близкая к  $N$ . Доказать, что погрешность этой формулы приближённо равна  $\frac{n^2-1}{12n^3} \left(\frac{b}{a^n}\right)^3$ .

**1516.** Вычислить по предыдущей формуле следующие корни:

а)  $\sqrt[3]{30}$ , б)  $\sqrt[3]{70}$ , в)  $\sqrt[3]{500}$ , г)  $\sqrt[3]{250}$ , д)  $\sqrt[5]{60}$ , е)  $\sqrt[5]{84}$ .

**1517.** Воспользовавшись биномом Ньютона и равенством

$$\sqrt[3]{2} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{128} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}},$$

вычислить с 10 знаками величину  $\sqrt[3]{2}$ .

**1518.** С помощью бинома Ньютона и тождества

$$\sqrt{2} = \frac{1}{5} \sqrt{50} = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$$

вычислить  $\sqrt{2}$  с 10 знаками.

**1519.** С помощью ряда для  $\ln(1+x)$  при  $x = -\frac{1}{10}$ ,  $-\frac{1}{25}$  и  $\frac{1}{30}$ , а также тождеств

$$\ln \frac{9}{10} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \ln 5, \quad \ln \frac{24}{25} = 3 \ln 2 + \ln 3 - 2 \ln 5,$$

$$\ln \frac{81}{80} = 4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \ln 5$$

вычислить натуральные логарифмы чисел 2, 3, 5 и 10 с 10 знаками после запятой.

**1520.** Доказать, что величины

$$\Delta \ln n = \ln(n+1) - \ln n, \quad \Delta^2 \ln n = \ln(n+2) - 2 \ln(n+1) + \ln n,$$

$$\Delta^3 \ln n = \ln(n+3) - 3 \ln(n+2) + 3 \ln(n+1) - \ln n$$

имеют соответственно следующие разложения в ряды:

$$\Delta \ln n = 2 \left[ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{-1}{5(2n+1)^5} + \dots \right],$$

$$\Delta^2 \ln n = - \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^4} + \frac{1}{3(n+1)^6} + \dots \right],$$

$$\Delta^3 \ln n = 2 \left[ \frac{8}{(2n+3)^3} + \frac{48}{(2n+3)^5} + \frac{312}{(3n+3)^7} + \dots \right].$$

**1521.** Доказать, что табличная разность обыкновенных пятизначных логарифмов чисел, т. е.  $\lg(n+1) - \lg n$ , при  $1000 < n < 10\,000$  приближённо выражается формулой  $\Delta = 10^5 \cdot \frac{M}{n} = \frac{4,429}{n}$ ;  $M = 0,43429$  — логарифмический модуль,  $\Delta$  выражена в сотых долях.

**1522.** Доказать, что табличная разность таблицы логарифмов синусов, данных через одну минуту, выраженная в сотых долях, может быть дана приближённой формулой

$$\Delta \ln \sin x \cong 12,6 \operatorname{ctg} x.$$

**1523.** Доказать, что формулы того же рода для синусов и для логарифмов тангенсов имеют вид:

$$\Delta \sin x = 29,1 \cos x, \quad \Delta \lg \operatorname{tg} x = \frac{25,2}{\sin 2x}.$$

Несколько следующих задач основаны на приближённых равенствах  $\sin x \cong x$ ,  $\operatorname{tg} x \cong x$ , обладающих высокой точностью для малых углов. В некоторых из этих задач нужно воспользоваться более точными формулами:

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{6}; \quad \operatorname{tg} x \cong x + \frac{x^3}{3}.$$

**1524.** Под каким углом зрения виден за 10 км диаметр фабричной трубы с радиусом 2 м?

**1525.** Диск Солнца виден под углом 30'. Во сколько раз расстояние до Солнца больше диаметра Солнца?

**1526.** Полотно железной дороги имеет уклон 0,012. Какой угол с горизонталью оно составляет?

**1527.** За сутки земной шар пробегает приблизительно дугу в 1° своей орбиты, диаметр которой  $150 \cdot 10^6$ . Определить, на сколько отклоняется от прямой линии путь Земли за 1 секунду (27 км) и за 1 минуту?

**1528.** Дуга 1° земного меридиана имеет около 112 км. На сколько она длиннее своей хорды?

**1529.** Доказать приближённую формулу:  $l = \sqrt{13h}$ , где  $h$  — высота наблюдателя над горизонтом в метрах, а  $l$  — дальность до горизонта в километрах.

**1530.** При измерении расстояния между точками отсчёт на протянутой ленте показал 12 м. Зная, что провес ленты был 20 см, и считая форму ленты дугой круга, определить расстояние между точками с поправкой на провес.

В следующих задачах вычислить с помощью рядов величины с указанной точностью.

**1531.** Найти  $\sin 1^\circ$  с точностью до  $10^{-5}$ .

**1532.** Найти  $\cos 1^\circ$  с точностью до  $10^{-4}$ .

**1533.** Найти  $\sin 10^\circ$  с точностью до  $10^{-4}$ .

**1534.** Вычислить  $\pi$  с точностью до  $10^{-10}$  с помощью тождества  $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ .

**1535.** Шенкс вычислил  $\pi$  с 707 знаками с помощью тождества предыдущей задачи. Сколько членов в разложениях  $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$  и  $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$  он должен был удерживать?

**1536.** Одно из правил Гюйгенса для вычисления длины окружности эквивалентно равенству:

$$2\pi = \frac{P_n + 2p_n}{3r},$$

где  $P_n$  и  $p_n$  — периметры описанного и вписанного правильного многоугольников,  $r$  — радиус круга. Доказать, что погрешность этого равенства приближённо равна  $\frac{30}{n^4}$ .

## § 8. Раскрытие неопределённостей

Решение ближайших задач удобно находится с помощью теоремы, которую не совсем точно называют правилом Лопиталья. В силу её, если при  $x$ , стремящемся к конечному или бесконечному пределу, числитель и знаменатель дроби  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  одновременно стремятся к нулю или же к бесконечности, то

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

При этом предполагается, что предел в правой части существует.

Найти пределы следующих выражений:

$$1537. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^m - 1 + x^2}.$$

$$1538. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}.$$

$$1540. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}.$$

$$1541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$1542. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$1543. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{e^x}.$$

$$1544. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{e^{ax}}; \quad a > 0.$$

$$1545. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$1546. \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

$$1547. \lim_{x \rightarrow a} \arcsin(x-a) \operatorname{ctg}(x-a).$$

$$1548. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^m}; \quad m > 0.$$

$$1549. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^m}; \quad m > 0.$$

Применяя разложение в ряды, найти пределы, указанные в следующих задачах.

$$1550. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}.$$

$$1551. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}.$$

$$1552. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]. \quad 1553. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$1554. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x \sin x}.$$

$$1555. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$1556. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}.$$

$$1557. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}.$$

$$1558. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

$$1559. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$

В следующих задачах пределы находятся разными приёмами.

$$1560. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x}.$$

$$1561. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(1-x).$$

$$1562. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^3 \sin \frac{\pi}{x}}{x}.$$

$$1563. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$1564. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{m + nx^2}}; b > 0, n > 0.$$

$$1565. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{x} \right)^{x^2}.$$

$$1566. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1567. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1568. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 - x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$1569. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x} \right).$$

$$1570. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$1571. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right].$$

1572. Найти предел отношения площади сегмента к площади треугольника, образованного хордой и касательными в концах дуги, при условии, что дуга сегмента стремится к нулю.

1573. Такой же вопрос по отношению к сегменту и треугольнику, составленному хордой и двумя хордами, соединяющими её концы с серединой дуги.

1574. Если  $a, b, c$  — стороны сферического треугольника,  $A, B, C$  — противолежащие углы, то

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Во что переходит эта формула, если  $a, b$  и  $c$  малы?

1575. Тело падает в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Путь, пройденный за  $t$  секунд, выражается формулой

$$s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2 g}{a^2} \left( 1 - e^{-\frac{at}{m}} \right),$$

где  $m$  — масса,  $a$  — коэффициент трения. Найти приближённые формулы для  $s$ , если  $\frac{at}{m}$  велико, а также для случая, если  $\frac{at}{m}$  весьма мало.



## § 9. Экстремальные значения функций нескольких переменных

Наибольшие и наименьшие значения функций от двух переменных, имеющих в данной области частные производные нужных порядков, находятся с помощью следующих теорем.

I. Для того чтобы функция  $f(x, y)$  имела экстремальное значение в некоторой точке  $(x, y)$ , необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

II. Для того чтобы  $f(x, y)$  в некоторой точке  $(x, y)$  имела экстремальное значение, достаточно, чтобы величина  $rt - s^2$  была положительна, а величины  $p$  и  $q$  равны нулю. Если при этом  $r$  и  $t > 0$ , то величина  $f(x, y)$  имеет минимальное значение, если же  $r$  и  $t < 0$ , то  $f(x, y)$  имеет максимальное значение. Здесь приняты для краткости обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Для функций нескольких независимых переменных существуют подобные же, но несколько более сложные критерии.

III. Для того чтобы функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имела в некоторой точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  экстремальное значение, необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

При этом предполагается, что во всех точках области функция имеет все нужные производные.

IV. Для того чтобы функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имела в некоторой точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  экстремальное значение, достаточно выполнение следующих условий:

$$a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0;$$

б) все главные миноры чётного порядка у определителя

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны, а знак у главных миноров нечётного порядка одинаков со знаком  $p_{11}$ . При этом для краткости положено:

$$p_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}.$$

Если при этих условиях  $p_{11} > 0$ , то функция имеет минимум. Если же  $p_{11} < 0$ , то функция имеет максимум.

Найти экстремальные значения следующих функций, заданных в явном виде:

$$1576. \quad z = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by.$$

$$1577. \quad z = x^3 y^2 (a - x - y).$$

$$1578. \quad z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$1579. \quad z = x^3 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

$$1580. z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y} \text{ при } x > 0, y > 0.$$

$$1581. z = x^3 + y^3 - 3axy.$$

$$1582. z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

$$1583. z = x^3 + y^3 - 9xy + 27 \text{ при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, a > 3.$$

$$1584. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \text{ при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, a > 1.$$

$$1585. z = e^{-x^2 - y^2} (ax^2 + by^2); a > 0, b > 0.$$

$$1586. z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}. \quad 1587. z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$1588. z = \sin x + \sin y + \sin(x+y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1589. z = \sin x + \sin y + \cos(x+y); 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$1590. z = \cos x \cos y \cos(x+y); 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$1591. z = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2.$$

$$1592. z = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha \cos(y - \beta).$$

$$1593. u = xyz(4a - x - y - z).$$

$$1594. u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$$

$$1595. u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$1596. u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$1597. u = (ax + by + cz)e^{-x^2 - y^2 - z^2}.$$

1598. Задача Гюйгенса: между положительными числами  $a$  и  $b$  вставить  $n$  других чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  так, чтобы величина дроби

$$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2) \dots (x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$$

получила наибольшее значение.

В следующих задачах требуется найти наибольшее и наименьшее значения функций  $z$ , заданных неявно, как функции от  $x$  и  $y$ .

$$1599. 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

$$1600. 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$$

$$1601. 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0.$$

$$1602. 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

$$1603. x^3y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^3 - 3z - 14 = 0.$$

$$1604. x^4 + y^4 + z^4 = 2a^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Дальнейшие примеры содержат вопросы о нахождении относительных экстремальных значений, т. е. о нахождении экстремальных значений функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , переменные которой связаны несколькими уравнениями  $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , где функции  $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  имеют первые и вторые частные производные во всей области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

При отыскании экстремальных значений здесь удобен способ Лагранжа. Он заключается в том, что составляют вспомогательную функцию

$$\Phi = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — неопределённые постоянные множители. После этого пишем ряд уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Из них, а также и из уравнений  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0$  можно найти значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а также и величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых  $u = f$  получает экстремальное значение при соблюдении условий  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0$ , находятся среди полученных по способу Лагранжа.

Критерий, дающий возможность узнать, достигается ли экстремальное значение  $f$ , и какое именно, при величинах  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , полученных по способу Лагранжа, сравнительно сложен и здесь не приводится.

Найти наибольшие и наименьшие значения следующих функций переменных, связанных указанными условиями:

$$1605. u = x + y; \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

$$1606. u = x^m + y^m; \quad x + y = 2a; \quad a > 0, \quad m > 1.$$

$$1607. u = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m; \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = na; \\ a > 0, \quad m > 1.$$

$$1608. u = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m; \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = na; \\ a > 0, \quad m < 1.$$

$$1609. u = xy; \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$1610. u = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

$$1611. u = x + y + z, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1; \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

$$1612. u = x^2 y^3 z^4; \quad 2x + 3y + 4z = a.$$

$$1613. u = x^2 + 2y^2 + 3z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + 2y + 3z = 0.$$

$$1614. u = xyz; \quad x + y + z = 5, \quad xy + yz + xz = 8.$$

$$1615. u = x^2 + y^2 + z^2; \quad lx + my + nz = 0, \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

$$1616. u = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}; \quad x + y + z = \pi; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$1617. u = x - y; \quad \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1618. u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}; \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = p,$$

все  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, так же, как и числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$1619. u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

$$1620. u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad lx + my + nz = 0.$$

**1621. Неравенство Адамара для определителя третьего порядка**

$$u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

имеет вид:

$$|u| \leq 1, \text{ если } a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Доказать это неравенство.

**1622. Неравенства Маклорена:** если  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  и  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$ , то

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_n x_{n-1} \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3, \text{ и т. д.}$$

Доказать эти неравенства.

**1623. Задачу Гюйгенса** (см. № 1598) можно свести к доказательству неравенства:

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \geq (1 + q)^n,$$

если  $u_1 u_2 \dots u_n = q^n$ . Доказать это неравенство.

В заключение приводятся ряд задач на нахождение наибольших и наименьших величин, которые могут быть решены как изложенными методами, так и другими.

**1624.** Из всех треугольников с одинаковым периметром  $2p$  найти треугольник с наибольшей площадью.

**1625.** Найти наибольшую площадь треугольника с данными основанием  $a$  и углом при вершине  $A$ .

**1626.** Данный треугольник разделить на две равновеликие части прямою наименьшей длины.

**1627.** Доказать, что в треугольнике радиус вписанного круга не больше, чем половина радиуса описанного круга.

**1628.** В данный треугольник вписать треугольник с наименьшим периметром.

**1629.** В данный квадрат вписать четырёхугольник с наименьшим периметром.

**1630.** Внутри четырёхугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой до вершин была бы наименьшей.

**1631.** Внутри четырёхугольника найти точку, сумма расстояний которой до вершин была бы наименьшей.

**1632.** Найти точку, сумма квадратов расстояний которой до данных точек была бы наименьшей.

**1633.** Найти наибольшую площадь четырёхугольника с данными сторонами  $a, b, c, d$ .

**1634.** Найти многоугольник с наибольшей площадью и с данными сторонами  $a, b, c, \dots, l$ .

**1635.** Найти наибольшую площадь многоугольника с  $n$  сторонами, вписанного в круг радиуса  $a$ .

**1636.** Найти наименьшую площадь многоугольника с  $n$  сторонами, описанного около круга радиуса  $a$ .

**1637.** В данный круг вписать треугольник, сумма квадратов сторон которого была бы наибольшей.

**1638.** В данный круг вписать наибольший по площади четырехугольник с данным углом  $\alpha$ .

**1639.** На плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

**1640.** Из всех плоскостей, проходящих через данную точку, найти наиболее удаленную от начала координат.

**1641.** На эллипсоиде  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

**1642.** Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме его ребер  $12a$ .

**1643.** Найти наибольший объем прямоугольного параллелепипеда с данной полной поверхностью  $6a^2$ .

**1644.** Около прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $2a, 2b$  и  $2c$  описать наименьший по объему эллипсоид.

**1645.** Через точку  $(a, b, c)$  провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

**1646.** Определить размеры прямоугольного открытого сверху ящика так, чтобы при данных объеме  $v$  и толщине стенок  $h$  на них пошло наименьшее количество материала.

**1647.** Определить размеры цилиндрического сосуда с данной поверхностью и наибольшим объемом.

**1648.** В данный конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

**1649.** Из конусов с данной боковой поверхностью  $S$  какой имеет наибольший объем?

**1650.** Найти наибольший по объему сосуд формы усеченного конуса с данными основанием и образующей:  $l = 4r$ .

**1651.** На эллипсе даны две точки. Где на том же эллипсе поместить третью так, чтобы получившийся треугольник имел наибольшую площадь?

**1652.** Найти кратчайшее расстояние точки  $(p, 4p)$  до параболы  $y^2 = 2px$ .

**1653.** В заданный равнобедренный треугольник вписать параболы с общей осью и наибольшей площадью. Площадь сегмента параболы равна произведению  $\frac{2}{3}$  основания на высоту.

**1654.** В данный эллипс вписать равнобедренный треугольник наибольшей площади с основанием, параллельным оси.

**1655.** На эллипсе найти точку, наиболее близкую к данной точке большой оси  $(m, 0)$ .

**1656.** Около эллипса описать треугольник наименьшей площади с основанием, параллельным оси.

**1657.** Найти нормаль эллипса, наиболее удалённую от центра.

**1658.** Найти нормаль к эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$ , отрезок которой внутри эллипса имел бы наименьшую длину.

**1659.** Провести к эллипсу касательную, отрезок которой между осями имеет наименьшую длину.

**1660.** Найти площадь  $S$  эллипса, полученного при сечении эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостью  $lx + my + nz = 0$ .

**1661.** Провести к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  касательную плоскость с наименьшей суммой отрезков на осях.

**1662.** Доказать, что из хорд, параллельных оси  $Oz$  и заключённых между плоскостью  $z = ax + by + c$  и эллиптическим параболоидом  $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ex + F$ , наибольшая проходит через центр плоского сечения.

**1663.** В сегмент эллиптического параболоида  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$ , вырезанный плоскостью  $z = h$ , вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшим объёмом.

**1664.** К эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  провести касательную плоскость так, чтобы центр тяжести треугольника, выделяемого на этой плоскости плоскостями координат, был наименее удалён от начала.

**1665.** К эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  провести касательную плоскость, образующую с его плоскостями симметрии тетраэдр наименьшего объёма.

---

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## § 1. Уравнения кривых и их виды

**1666.** На горизонтальную ось насажен плоский диск-эксцентрик. Какую форму он должен иметь, чтобы упирающийся в него вертикальный стержень совершал гармоническое колебательное движение при равномерном вращении оси?

**1667.** Тот же вопрос, но вертикальный стержень должен совершать равномерное движение вверх и вниз. (Так устроено движение трубки у некоторых микроскопов.)

**1668.** Косо срезанный цилиндр покрыт красящим веществом и катится по плоскости. Какой кривой ограничена окрашивающая часть плоскости?

**1669.** Доказать, что кривые  $r = e^{a\varphi}$  и  $r = ce^{a\varphi}$  геометрически подобны — одна переходит в другую при увеличении масштаба рисунка. В то же время они равны, переходя друг в друга при повороте на некоторый угол.

**1670.** Доказать, что площади, заключённые между осью  $x$  и кривыми  $y = e^x$  и  $y = ae^x$ , при передвижении одной из этих кривых вдоль оси  $x$  остаются равными друг другу.

**1671.** Прямая данной длины  $l$  скользит концами  $A$  и  $B$  по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Из вершины  $C$  прямоугольника  $OACB$  на прямую опускается перпендикуляр. Найти геометрическое место основания этого перпендикуляра.

**1672.** Тот же вопрос для конца перпендикуляра, опущенного из начала координат. (Четырёхлепестник.)

**1673.** Дан отрезок  $OO_1 = a$ . На произвольный луч, проходящий через точку  $O$ , опущен из точки  $O_1$  перпендикуляр  $O_1M$ , а из основания этого перпендикуляра  $M_1$  опущен перпендикуляр  $M_1M$  на луч, симметричный с первым относительно линии  $OO_1$ . Найти геометрическое место оснований второго перпендикуляра  $M$ .

**1674.** Из точки  $M(\xi, y)$  окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  проводится прямая  $y = \eta$  до пересечения с осью ординат в точке  $N$ . Из точки  $(a, 0)$  проводится прямая в точку  $N$ . Найти геометрическое место точки её пересечения с ординатой точки  $M$ .

**1675.** Прямой угол вращается около вершины  $A(a, 0)$ . Из начала координат через точку пересечения одной из сторон угла с окруж-

ностью  $x^2 + y^2 = r^2$  проводится прямая до пересечения с другой стороной угла. Найти геометрическое место точки пересечения.

**1676.** Прямоугольный треугольник имеет катеты  $a$  и  $2a$ . Гипотенуза скользит одним концом по оси  $Ox$ , а другим — по окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ . Найти геометрическое место вершины прямого угла.

**1677.** Найти геометрическое место точек касания прямых из начала координат, касательных к окружностям с радиусом  $a$  и с центром на оси  $Ox$ .

**1678.** Две равные параболы вращаются около своих вершин так, что четыре точки их пересечения всегда лежат на окружности. Найти геометрическое место центра окружности.

**1679.** Найти геометрическое место вершины равнобокой гиперболы с данным центром, проходящей через данную точку.

**1680.** Тот же вопрос для фокуса гиперболы.

**1681.** Гипербола с полуосью  $a$  проходит через данные две точки с расстоянием  $2c$ . Найти геометрическое место центра гиперболы, если она равнобокая.

**1682.** Найти геометрическое место середин отрезков нормалей к эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , заключённых внутри эллипса.

**1683.** Два стержня длиной  $\sqrt{2}$  вращаются вокруг своих концов, закреплённых в точках  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ . Другие концы их соединены шарнирно стержнем длиной 2. Определить, какую кривую описывает середина соединительного стержня.

**1684.** Инверсор Поселлье-Липкина состоит из ромба  $ABCD$  со стороной, равной  $a$ . Точки  $A$  и  $C$  соединены с неподвижной точкой  $O$  прямыми  $OA$  и  $OC$  длиной  $b$ , где  $b > a$ .

Стороны ромба и отрезки  $QA$  и  $OC$  — стержни, соединённые шарнирами. Доказать, что точки  $O$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной прямой и притом  $OB \cdot OD = b^2 - a^2$ , так что движение вершины ромба по данной кривой позволяет выполнить инверсию.

**1685.** Доказать, что при движении точки  $B$  в инверсоре Поселлье-Липкина по окружности, проходящей через точку  $O$ , точка  $D$  описывает прямую.

Какие линии изображаются параметрическими уравнениями:

**1686.**  $x = t^2 - t + 1$ ,  $y = t^2 + t + 1$ .

**1687.**  $x = t^2 - 2t + 3$ ,  $y = t^2 - 2t + 1$ .

**1688.**  $x = a \sin^2 t$ ,  $y = b \cos^2 t$ .

**1689.**  $x = a \sin^4 t$ ,  $y = a \cos^4 t$ .

**1690.** На кривой  $x = t^2 - 2t + 3$ ,  $y = t^2 + 2t - 1$  найти самую левую и самую низкую точки.

**1691.** Воспользовавшись тождеством  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , представить уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  в параметрической форме.

**1692.** Воспользовавшись тождеством  $e^{-t} \cdot e^t = 1$ , представить уравнение гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  в параметрической форме



**1693.** Представить уравнение окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  в параметрической форме, приняв за параметр угловой коэффициент хорды окружности, проходящей через точку  $(-a, 0)$ .

**1694.** Доказать, что координаты точек кривой 2-го порядка можно рационально выразить через угловой коэффициент переменной хорды кривой, проходящей через какую-нибудь выбранную точку кривой.

**1695.** Кривая  $f(x, y) = 0$ , координаты точек которой можно рационально выразить через параметр, называется уникурсальной. Доказать, что кривые  $r = f(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $f$  — рациональная функция, уникурсальны.

**1696.** Доказать, что циссоида  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$  уникурсальна, выразив координаты её точек через угловой коэффициент хорды, соединяющей начало с данной точкой кривой

**1697.** Решая совместно уравнение декартова листа  $x^3 + y^3 = 3axy$  и уравнение вспомогательной прямой  $y = tx$ , получить параметрические уравнения декартова листа:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

**1698.** Доказать, что три точки декартова листа, соответствующие значениям параметра  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $t_1 t_2 t_3 = -1$ . Точки различные.

**1699.** Доказать, что координаты точек кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$  могут быть выражены через некоторый параметр  $t$  формулами:

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2}.$$

**1700.** При каком условии три точки кардиоиды, соответствующие значениям параметра  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

**1701.** Доказать, что координаты точек строфоиды  $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$  можно выразить рационально через некоторый параметр  $t$  по формулам:

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2 - 1)}{1+t^2}.$$

**1702.** При каком условии точки строфоиды, соответствующие значениям  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  параметра (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

**1703.** При каких значениях  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  соответствующие точки строфоиды (см. задачу 1701) лежат на одной окружности?

**1704.** Доказать, что четыре точки циссоиды  $x = \frac{a}{t^2+1}$ ,  $y = \frac{a}{t(t^2+1)}$ , соответствующие значениям параметра  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $t_4$ , лежат на одной окружности при условии  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ .

**1705.** Выразить рационально через вспомогательный параметр координаты точек лемнискаты  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

**1706.** Показать, что кривая  $x^y = y^x$  распадается на биссектрису первого координатного угла и кривую

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

где  $n$  — переменный параметр.

## § 2. Касательная и нормаль

**1707.** Показать, что кривые

$$y = a \sin \frac{x}{a}, \quad y = a \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad y = a \ln \frac{x}{a}$$

пересекают ось  $Ox$  под одинаковыми углами, независимо от величины  $a$ .

**1708.** Найти угол, под которым кривая

$$y = \frac{x + c_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n}{1 + b_1 x^2 + b_2 x + \dots + b_m x^m}$$

пересекает ось  $Oy$ .

**1709.** При каком значении  $a$  кривая  $y = \frac{x^3 + ax}{b}$  пересекает ось  $Ox$  под углом  $45^\circ$ ?

**1710.** Тот же вопрос для кривой  $y = \frac{ax}{1 + bx^2}$ .

**1711.** Какая из прямых, идущих из начала координат, пересекает гиперболу  $xy = a^2$  под прямым углом?

**1712.** Тот же вопрос для эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**1713.** Найти уравнение синусоиды, пересекающей ось  $Ox$  в начале координат под углом  $45^\circ$ , а в точке  $(a, 0)$  — под углом  $135^\circ$ .

**1714.** Доказать, что угол между радиусом-вектором, проведённым из начала координат в точку  $(r, \varphi)$  кривой  $r^n = a^n \cos n\varphi$ , и её касательной равен  $n\varphi + \frac{\pi}{2}$ .

**1715.** Доказать, что кривая  $r = e^{a\varphi}$  пересекает все радиусы-векторы, идущие из начала, под одинаковым углом.

**1716.** Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда  $r = a\varphi$  и радиусом-вектором, проведённым к точке касания из начала, стремится к  $90^\circ$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ .

**1717.** Найти угол между касательной к кардиоиде  $r = a(1 + \cos \varphi)$  и радиусом-вектором точки касания.

**1718.** Найти уравнение касательной к кривой  $y = x \ln x + 1$  в точке с ординатой 1.

**1719.** Найти уравнение касательной к кривой  $2x^3 - x^2 y^2 - 3x + y + 7 = 0$  в точке  $(1, -2)$ .

**1720.** Провести нормаль к кривой  $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$  в точке, где  $y = 3$ .

1721. Найти нормаль к локону Марии Аньези  $x^3y = a^2(a - y)$ , параллельную прямой  $y = 2x$ .

1722. Найти нормаль к кривой  $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$  в точке  $x = 2\pi a$ .

1723. Найти нормаль к кардиоиде  $r = a(1 + \cos \varphi)$ , составляющую угол  $45^\circ$  с полярной осью.

1724. Найти наиболее удалённую от начала координат касательную к астроидам  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

1725. Доказать, что касательные к кривым  $y = af(x)$ , имеющие общую абсциссу точки касания, пересекаются в одной точке.

1726. Доказать, что в точках с одинаковой абсциссой поднормали к кривым  $y = f(x)$  и  $y = \sqrt{f^2(x) + a^2}$  одинаковы.

1727. Доказать, что у кривых  $y = ax^n$  отношение подкасательной к абсциссе точки касания равно  $\frac{1}{n}$ .

1728. Доказать, что у кривой  $y = a \ln(x^2 - a^2)$  сумма длин касательной и подкасательной пропорциональна величине  $xy$ .

1729. Доказать, что длина касательной к трактрисе  $\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a}$  равна  $a$ .

1730. Доказать, что все нормали к кривой

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

одинаково удалены от начала координат.

1731. Доказать, что отрезок нормали к кривой

$$x = 2a \sin t + a \sin t \cos^2 t, \quad y = -a \cos^3 t,$$

заключённый между осями координат, равен  $2a$ .

1732. Доказать, что у кривой

$$x = 2a \ln \sin t - 2a \sin^2 t, \quad y = a \sin 2t$$

отрезок оси  $Ox$  между касательной и нормалью равен  $2a$ .

1733. Доказать, что окружность  $x^2 + y^2 = a^2$  и нормали к эпициклоиде

$$\begin{aligned} x &= a \left[ (1 + \lambda) \cos t - \lambda \cos \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) t \right], \\ y &= a \left[ (1 + \lambda) \sin t - \lambda \sin \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) t \right] \end{aligned}$$

пересекаются в точке  $(a \cos t, a \sin t)$ .

1734. То же для гипоциклоиды

$$\begin{aligned} x &= a \left[ (1 - \lambda) \cos t + \lambda \cos \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) t \right], \\ y &= a \left[ (1 - \lambda) \sin t + \lambda \sin \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) t \right]. \end{aligned}$$

1735. У кривой  $x^3 - y^3 = 3x^2$  найти касательную, параллельную прямой  $y = x$ .

1736. Доказать, что углы между касательными к кривым  $r = f(\varphi)$  и  $r = \frac{a}{f(\varphi)}$  и радиусами-векторами при одинаковом значении  $\varphi$  в точках касания составляют в сумме  $180^\circ$ .

1737. Доказать, что касательные к кривым  $y = \frac{\lambda \varphi(x) + \mu \varphi_1(x)}{\lambda + \mu}$  при одинаковых абсциссах точки касания пересекаются в одной точке, положение которой не зависит от  $\lambda$  и  $\mu$ .

1738. Каждый радиус-вектор кривой  $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$  пересекает её в трёх точках, отличных от полюса. Доказать, что касательные в этих точках составляют равносторонний треугольник.

1739. В трёх точках  $M_1, M_2, M_3$ , расположенных на декартовом листе  $x^3 + y^3 = 3xy$  на одной прямой, проводятся касательные, пересекающие эту кривую в точках  $P_1, P_2$  и  $P_3$ . Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.

1740. Из точки  $M$  на строфоиде  $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$  проведены прямые, касающиеся строфоиды в точках  $P$  и  $Q$ . Доказать, что точки  $M, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности с началом координат.

1741. У лемнискаты  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  параллельно данному направлению можно провести две пары касательных. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания каждой пары, составляют между собой угол  $120^\circ$ .

1742. Найти длину полярной подкасательной и поднормали у спирали  $r^2 = a^2 \varphi$ .

1743. Доказать, что полярные подкасательные у кривых  $r = f(\varphi)$  и  $r = \frac{af(\varphi)}{a + f(\varphi)}$  в точках, расположенных на одном радиусе-векторе, равны.

1744. Доказать, что у кривых  $r = f(\varphi)$  и  $r = a + f(\varphi)$  в точках, лежащих на одном радиусе-векторе, полярные поднормали равны.

1745. Найти круг радиуса  $a$ , касательный к декартову листу  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  в точке, где  $x = \frac{4a}{3}$ .

1746. Провести круг радиуса  $3a$ , нормальный к циссоиде  $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$  в точке, где  $x = a$ .

1747. Найти круг, проходящий через полюс и касательный к спирали Архимеда  $r = a\varphi$  при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Показать, что следующие пары линий пересекаются под прямым углом.

$$1748. x^2 - y^2 = a^2, xy = b^2.$$

$$1749. y^2 = 2ux + u^2, y_2 = -2vx + v^2.$$

$$1750. \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} = 1; \quad a > \mu > b.$$

$$1751. (2a - x)y^2 = x^3, \quad (x^2 + y^2)^2 = b^2(2x^2 + y^2).$$

$$1752. \quad b^2x^2 + a^2y^2 = c, \quad y^{b^2} = c_1x^{a^2}.$$

$$1753. \quad r = ae^{\varphi}, \quad r = be^{-\varphi}.$$

$$1754. \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad r = b^2 \sin 2\varphi.$$

$$1755. \quad r^2 = \ln \operatorname{tg} \varphi, \quad r^2 \cos 2\varphi + 1 = 0.$$

1756. Доказать, что кривые

$$r^2 \cos 2\varphi = a^2, \quad r^2 \cos (2\varphi + \alpha) = b^2$$

пересекаются под углом  $\alpha$ .

1757. Доказать, что кривая

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \quad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

пересекает прямую  $y = x$  под прямым углом.

1758. Доказать, что окружности

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

пересекаются под прямым углом при соблюдении условия

$$aa_1 + bb_1 = 2(c + c_1).$$

1759. Географическая широта есть угол между нормалью к поверхности Земли в данном месте и плоскостью экватора. Геоцентрическая широта — угол между той же плоскостью и радиусом-вектором из центра Земли в данную точку. Определить наибольшую разность этих широт, считая меридиан Земли эллипсом, у которого  $a = 6400$  км,  $b = 21$  км.

1760. Кривая  $f(x, y) = 0$  называется алгебраической, если  $f(x, y)$  — полином относительно  $x$  и  $y$ . Вводя степени вспомогательного переменного  $z$ , можно сделать этот полином однородным. Пусть  $f(x, y, z) = 0$  — получившееся уравнение. Доказать, что уравнение касательной к кривой можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z = 0,$$

где  $(x, y)$  — точка касания,  $(X, Y)$  — точка на касательной, а величины  $z$  и  $Z$  после нахождения производных заменяются единицей.

Подэрой кривой относительно данной точки называется геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к данной кривой. Найти подэры следующих кривых.

$$1761. \quad \text{Эллипса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ относительно центра.}$$

$$1762. \quad \text{Параболы } y^2 = 2px \text{ относительно вершины.}$$

$$1763. \quad \text{Параболы } y^2 = 2px \text{ относительно фокуса.}$$

$$1764. \quad \text{Гиперболы } x^2 - y^2 = a^2 \text{ относительно начала координат.}$$

$$1765. \quad \left(\frac{x}{a}\right)^n \pm \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \text{ относительно } (0, 0).$$

$$1766. \quad r = e^{a\varphi} \text{ относительно полюса.}$$

1767.  $r^n = a^n \cos n\varphi$  относительно полюса.

1768. Эвольвенты круга:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

относительно начала координат.

1769. Доказать, что точки касания касательных, проведённых из данной точки к логарифмической спирали  $r = ae^{m\varphi}$ , лежат на окружности, проходящей через полюс и данную точку.

1770. Из начала координат проведён луч, пересекающий строфоиду  $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$  в точках  $M$  и  $M_1$ . Найти геометрическое место точек пересечения касательных к строфоиде в точках  $M$  и  $M_1$ .

1771. Из данной точки  $M$  к кардиоиде  $r = a(1 + \cos \varphi)$  можно провести три касательные. Каково геометрическое место точек  $M$ , для которых три точки касания лежат на одной прямой?

1772. Каково геометрическое место концов полярной подкасательной у гиперболической спирали  $r\varphi = a$ ?

Найти геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются следующих кривых:

1773. Гиперболы  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ .

1774. Астроиды  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

1775. Параболы Нейля  $4y^3 = 27ax^2$ .

1776. Циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

1777. Каково геометрическое место вершин угла данной величины, стороны которого касаются циклоиды?

1778. Из точки  $M$  кривой  $y^2 = ce^{\frac{x}{a}} + 4a(x + a)$  проводится нормаль  $MP$  до пересечения с осью  $Ox$  в точке  $P$ . Доказать, что середина  $MP$  лежит на параболе  $y^2 = ax$ .

1779. Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к параболе две взаимно перпендикулярные нормали?

1780. При преобразовании обратными радиусами-векторами, или инверсии, точка с полярными координатами  $r$  и  $\varphi$  переходит в точку с полярными координатами  $\frac{a^2}{r}$  и  $\varphi$ , где  $a$  — постоянная. Доказать,

что инверсия есть конформное отображение, т. е. что изображения кривых пересекаются под теми же углами, что и сами кривые.

1781. Парабола  $y = -ax^2$  катится без скольжения по параболе  $y = ax^2$ . Найти геометрическое место её вершины, в предположении, что в начальный момент вершины совпадали.

1782. Доказать, что при том же движении параболы её фокус описывает прямую, а именно, директрису неподвижной параболы.

1783. По эллипсу  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  катится без скольжения другой такой же эллипс. В начальном положении их большие оси соприкасались концами. Найти геометрическое место центра катящегося эллипса.

**З а м е ч а н и е.** При решении последних двух задач полезно обратить внимание на расположение подвижной и неподвижной фигур относительно их общей касательной.

### § 3. Выпуклость, кривизна и радиус кривизны

**1784.** При каких значениях  $x$  кривая  $y = x^3 + ax + b$  обращена выпуклостью вверх?

**1785.** Определить направление выпуклости кривой  $x(x^2 - y^2) + y^2 = 0$  в точках, где  $x = \frac{3}{2}$ .

**1786.** Исследовать характер вогнутости кривой  $x^4 = y(x^2 - y^2)$  в точках, где  $y < 0$ .

**1787.** Исследовать характер выпуклости кривой  $r \cos^3 \varphi = 1$  при  $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$ .

**1788.** Показать, что кривая  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$  в точках пересечения с осями обращена к началу координат выпуклой стороной, а в точках пересечения с биссектрисами углов — вогнутой.

**1789.** Показать, что кривая  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  обращена к началу координат вогнутой стороной, если

$$(x'y'' - x''y')(xy' - x'y) > 0.$$

**1790.** Исходя из определения кривизны, найти длину дуги в  $1^\circ$  земного меридиана у полюса и экватора. Меридиан можно считать эллипсом с полуосями  $a = 6400$  км и  $b = a - 21$  км (полярная полуось).

**1791.** Найти радиус кривизны кривой  $3ay^2 = 2x^3$ .

**1792.** Найти наименьший радиус кривизны у параболы  $y^2 = 2px$ .  
Найти радиусы кривизны у следующих линий:

**1793.**  $y = x^3$  в точке  $(1, 1)$ .

**1794.**  $x = t^2$ ,  $y = t^3$  в точке  $(1, 1)$ .

**1795.**  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  (цепная линия) в точке  $(0, a)$ .

**1796.**  $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ .

**1797.**  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ .

**1798.**  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

**1799.**  $r = a(1 + \cos \varphi)$ . **1800.**  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , при  $\varphi = 0$ .

Найти наибольшую кривизну у кривых:

**1801.**  $y = \ln x$ . **1802.**  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  (эллипс).

**1803.**  $y = a \ln \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ . **1804.**  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

**1805.** Если на нормали от точки кривой отложить в сторону вогнутости кривой величину радиуса кривизны, то найдём центр кривизны. Доказать, что его координаты для кривой  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  выражаются формулами:

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Найти координаты центра кривизны у кривых:

**1806.** Гипербола  $xy = a^2$  в точке  $(a, a)$ .

1807. Строфоиды  $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ .

1808.  $y = x \ln x$  в той точке, где  $y' = 0$ .

1809.  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .

1810.  $r = a \cos^3 \varphi$ .

1811. Доказать, что для точек спирали Архимеда  $r = a\varphi$  при  $\varphi \rightarrow \infty$  величина разности между радиусом-вектором и радиусом кривизны стремится к нулю.

1812. Доказать, что при тех же условиях центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью  $r = 1$ .

1813. Доказать, что у кривых  $r^n = a^n \cos n\varphi$  полярная нормаль в  $n+1$  раз больше радиуса кривизны.

1814. Доказать, что у кривых  $r^n = a^n \sin n\varphi$  часть радиуса-вектора, заключённая внутри круга кривизны, равна  $\frac{2r}{n+1}$ .

1815. Доказать равенство  $R = \frac{r dr}{dp}$ , где  $R$  — радиус кривизны,  $r$  — радиус-вектор,  $p$  — перпендикуляр из полюса на касательную.

1816. Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три таких точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

1817. Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда  $r = a\varphi$ , лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, размеры которого не зависят от выбора луча.

1818. Координаты точек кривой можно выразить через длину дуги кривой:  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ . Обозначая через  $\Delta s$  малое приращение  $s$ , а через  $\Delta t$  — соответствующую хорду, доказать равенство:

$$\Delta l = \Delta s - \frac{1}{24R^2} \Delta s^3 + \dots,$$

где  $R$  — радиус кривизны кривой.

1819. Точка касания принята за начало, касательная — за ось  $Ox$ , а ось  $Oy$  направлена от точки касания к центру кривизны. Доказать, что в окрестности точки касания, т. е. при малых значениях  $x$ , справедливы формулы:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R} + ax^3 + \dots, \quad y_2 = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \dots,$$

где  $R$  — радиус кривизны в точке  $(0, 0)$ ,  $y_1$  — ордината точек кривой,  $y_2$  — ордината точек круга кривизны.

1820. Найти параболу, соединяющую начало координат  $O$  с точкой  $B(a+b, 0)$ , так, чтобы дуга параболы  $OB$  вместе с нижней половиной окружности  $(x-a)^2 + y^2 = b^2$  образовала плавную кривую с непрерывной кривизной.

1821. Такой же вопрос, но нижняя полуокружность заменена дугой параболы, соединяющей точку  $A(a-b, 0)$  с точкой  $B$ , где она имеет касательную  $x = a+b$  и кривую, равную единице.

1822. Найти параболу  $y = ax^2 + bx + c$ , имеющую с синусоидой  $y = \sin x$  в точке  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  общие касательную и кривизну.



1823. Найти параболу 5-го порядка

$$y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F,$$

которая бы в точках  $(a, h)$ ,  $(-a, -h)$  касалась прямых  $y = h$  и  $y = -h$ , имея касание второго порядка.

1824. Доказать, что окружность  $(x - 3a)^2 + (y - 3a)^2 = 8a^2$  и парабола  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$  имеют в точке  $(a, a)$  соприкосновение 3-го порядка.

1825. Доказать, что соприкасающийся круг (круг кривизны) к кривой 2-го порядка в вершине кривой имеет соприкосновение 3-го порядка.

1826. Доказать, что для каждой точки, где кривая достаточно гладка, существует кривая 2-го порядка, имеющая с данной кривой в данной точке соприкосновение 4-го порядка.

1827. Доказать, что у циклоиды кривая 2-го порядка с соприкосновением 4-го порядка — всегда эллипс.

1828. Доказать, что у логарифмической спирали кривые 2-го порядка, имеющие с ней соприкосновение 4-го порядка, — эллипсы, большие оси которых образуют постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

1829. Найти геометрическое место фокусов парабол, имеющих в данной точке соприкосновение 2-го порядка с данной кривой.

1830. Найти геометрическое место середин хорд, общих эллипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  и его соприкасающемуся кругу.

1831. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  на хорды, общие эллипсу и его соприкасающемуся кругу.

#### § 4. Эволюты кривых

Геометрическое место центров кривизны кривой называется эволютой данной кривой. Уравнение эволюты для кривой  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  получается исключением параметра  $t$  из уравнений

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Найти эволюты следующих кривых:

1832. Параболы  $y^2 = 2px$ .

1833. Эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .

1834. Гиперболы  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = b \operatorname{sh} t$ .

1835. Астроиды  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

1836. Циссоиды  $y^2(2a - x) = x^3$ .

1837. Гиперболы  $xy = a^2$ .

1838. Цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ .

1839. Циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

1840. Кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$ . 1841. Синусоиды  $y = a \sin \frac{x}{a}$ .  
 1842. Гипоциклоиды  $x = a(2 \cos t + \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ .  
 1843. Трактрисы  $x = -a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$ ,  $y = a \sin t$ .  
 1844. Кривой  $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ .  
 1845. Эвольвенты круга  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ .  
 1846. Логарифмической спирали  $r = e^{a\varphi}$ .

1847. Доказать равенство  $\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}$ ,

где  $(x, y)$  — точка кривой, а  $(\xi, \eta)$  — соответствующая точка эволюты. Пользуясь свойствами эволюты, найти длины дуг следующих кривых:

1848. Одной дуги циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .  
 1849. Астроиды  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  между точками  $(a, 0)$  и  $(0, a)$ .  
 1850. Кардиоиды  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .  
 1851. Параболы Нейля  $y^2 = x^3$  от  $(0, 0)$  до  $(4, 8)$ .  
 1852. Эволюты параболы  $y^2 = 2px$  от острия до точки пересечения эволюты с параболой.  
 1853. Логарифмической спирали  $r = e^{a\varphi}$  при  $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ .

**З а м е ч а н и е.** Все перечисленные кривые — эволюты других кривых, которые легко найти, пользуясь решениями задач, помещённых в первой части параграфа.

## § 5. Огибающие кривые

Уравнение  $f(x, y, a) = 0$  при различных значениях  $a$  изображает семейство кривых. Иногда существует огибающая этого семейства, т. е. кривая, касающаяся с кривыми этого семейства. Координаты точки касания кривой семейства и огибающей удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \quad (*)$$

Исключая из них параметр  $a$ , получаем геометрическое место точек касания, т. е. огибающую. Однако тем же уравнениям (\*) удовлетворяют и точки геометрического места особых точек кривых семейства, т. е. точек кривых,

где  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

Два примера характерны:

1) Семейство парабол Нейля:

$$(y - a)^2 = x^3$$

Уравнения (\*) принимают вид:

$$y - a = 0, \quad (y - a)^2 = x^3.$$

Из них, исключая  $a$ , получаем  $x = 0$ . Легко видеть, что это уравнение даёт геометрическое место особых точек кривых.

2) Семейство листов Декарта:

$$x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0.$$

Уравнения (\*) принимают вид:

$$(y-a)^2 - x = 0, \quad x^3 + (y-a)^3 - 3x(y-a) = 0.$$

Исключая  $a$ , приходим к уравнению:  $x^4 = 4x$ . Оно распадается на два:  $x = 0$  и  $x = \sqrt[3]{4}$ . Первое из них даёт геометрическое место особых точек, а второе — огибающую.

Не всякое семейство линий имеет огибающую: примером может служить семейство концентрических кругов. Может оказаться также, что часть кривых  $f(x, y, a) = 0$  касается общей огибающей, а другая часть кривых того же семейства не касается её и не имеет вообще огибающей.

В следующих задачах найти огибающую заданного семейства линий.

1854.  $(x-a)^2 + y^2 = 1$ .

1855.  $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ .

1856.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  при  $a^2 + b^2 = 1$

1857.  $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$  при  $\lambda + \mu = \lambda\mu$ .

1858.  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  при  $a + b = d$ .

1859. Прямых, отсекающих от данного угла, величиной  $\omega$ , треугольник с площадью  $2m^2$ .

1860.  $bx + ay = ab$  при  $a + b = c$ .

1861.  $bx + ay = ab$  при  $a^2 + b^2 = c^2$ .

1862. Вершина угла данной величины  $\alpha$  скользит по оси  $Ox$ , а одна из сторон проходит через точку  $(0, h)$ . Найти огибающую другой стороны.

1863. Квадрат со стороной  $a$  движется так, что две стороны его  $AB$  и  $BC$  проходят через точки  $(\pm b, 0)$ . Найти огибающую диагонали  $AC$ .

1864. Прямая равномерно вращается вокруг точки, движущейся с данной скоростью по данной прямой. Найти огибающую подвижной прямой.

1865. Круг катится без скольжения по данной прямой. Найти огибающую его диаметра.

1866. На хордах окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , параллельных оси  $Oy$ , строятся, как на диаметрах, окружности. Найти их огибающую.

1867. Найти огибающую окружностей, имеющих центр на параболе и проходящих через её вершину.

1868. Найти огибающую окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы, проходящих через фокус.

1869. Найти огибающую системы окружностей, имеющих центры на данном эллипсе и проходящих через центр эллипса.

1870. Найти огибающую окружностей с центрами на гиперболе  $xy = a^2$ , касающихся оси  $Ox$ .

1871. На радиусах-векторах кривой, как на диаметрах, строятся окружности. Доказать, что огибающая этих окружностей есть подэра кривой относительно полюса \*).

---

\*) Определение подэры см. на стр. 133.

1872. Круг  $x^2 + y^2 = r^2$  есть огибающая семейства  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .  
Какова зависимость между  $a$  и  $b$ ?

1873. Переменные  $z$  и  $t$  связаны уравнением  $\left(\frac{z}{a}\right)^m + \left(\frac{t}{b}\right)^m = 1$ .  
Найти огибающую кривых  $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{t}\right)^n = 1$ .

1874. Светящаяся точка имеет координаты  $(a, 0)$ . Найти огибающую лучей, отражённых от окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ . (Каустика.)

1875. Параллельные лучи падают на сферическое зеркало. Найти огибающую отражённых лучей.

1876. Светящаяся точка имеет координаты  $(a, 0)$ . Найти огибающую лучей, отражённых от параболы  $y^2 = 2px$ .

## § 6. Построение кривых

Найти вершины, т. е. точки, где касательная параллельна одной из осей координат и где при этом нет точки перегиба, у следующих кривых:

1877.  $x^2 + xy + y^2 = 3$ .

1878.  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .

1879.  $(x^2 + y^2)^2 = xy$ .

1880.  $x^4 + 4x^2y^2 - 6a^2x^2 + a^4 = 0$ .

1881.  $y = \sin \frac{1}{x}$ .

1882.  $y = \sin x^2$ .

1883. Найти расстояние по горизонтали между последовательными вершинами кривой  $y = e^{-ax} \cos bx$ .

Найти точки перегиба следующих кривых:

1884.  $y = x^4 - 6x^2$ .

1885.  $x^3 + y^3 = a^3$ .

1887.  $(a^2 + x^2)y = ax^2$ .

1886.  $x^3 + y^3 = x^2$ .

1888.  $y = 1 + \sqrt[3]{x^5}$ .

1889.  $y = x^4 e^{-x}$ .

1890.  $y = e^{\frac{1}{x}}$ .

1891.  $y = x^2 \ln x$ .

1892.  $y = \operatorname{tg} x$ .

1893.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ .

1894.  $r \cos^3 \varphi = 1$ .

1895.  $r = a (\operatorname{tg} \varphi - 1)$ .

При исследовании формы кривой вблизи данной её точки  $(a, b)$  полезно разложение в ряд Тейлора. Если  $f(x, y) = 0$  — уравнение кривой, то, разлагая левую часть по степеням разностей  $x - a = \xi$ ,  $y - b = \eta$ , в силу равенства  $f(a, b) = 0$ , получаем:

$$p\xi + q\eta + \frac{1}{2} [r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2] + \dots = 0. \quad (*)$$

Здесь для краткости через  $p, q, r, s$  и  $t$  обозначены соответственно значения производных  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  при  $x = a, y = b$ .

Если  $p^2 + q^2 > 0$ , то при малых значениях  $|\xi|$  и  $|\eta|$  кривая близка к прямой  $p\xi + q\eta = 0$ , т. е. к прямой  $p(x-a) + q(y-b) = 0$ . Эта прямая — касательная к кривой в точке  $(a, b)$ . Если же  $p = 0$  и  $q = 0$ , т. е. если в данной точке обе производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  обращаются в нуль, то уравнение (\*) переходит в такое:

$$\frac{1}{2}[r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2] + \dots = 0.$$

Точка  $(a, b)$  является особой точкой кривой.

Если при этом  $s^2 - rt > 0$ , то точка  $(a, b)$  — двойная. В ней пересекаются две ветви кривой. Угловые коэффициенты касательных к этим ветвям равны корням квадратного уравнения  $r\alpha^2 + 2s\alpha + t = 0$ .

Если  $s^2 - rt < 0$ , то точка  $(a, b)$  — изолированная: в достаточной близости от неё на кривой точек нет. Если  $s^2 - rt = 0$ , то для полного изучения характера особой точки нужно принимать во внимание дальнейшие члены разложения ряда Тейлора. Обычно при этом  $(a, b)$  есть точка возврата кривой.

Исследовать особые точки следующих алгебраических кривых:

1896.  $y^2 = x^3$ .

1897.  $y^2 = bx^3 + ax^2$ .

1898.  $y^2 = ax^2 + bx^5$ .

1899.  $x^3 + y^3 - xy = 0$ .

1900.  $x^4 - 2ax^2y + 2ay^3 + a^2y^2 = 0$ ;  $a \neq 0$ .

1901.  $x^6 - 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$ .

1902.  $2y^3x - y^4 = x(y - x)^2$ .

1903.  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .

1904. При каком соотношении между  $a$  и  $b$  кривая  $y^2 = x^3 + ax + b$  имеет двойную точку?

1905. Доказать, что при  $4a^3 + 27b^2 < 0$  кривая  $y^2 = x^3 + ax + b$  состоит из двух отдельных частей, а при  $4a^3 + 27b^2 > 0$  является сплошной линией.

При изучении трансцендентных кривых формула Тейлора не всегда применима. Поэтому трансцендентные кривые имеют особые точки и таких видов, каких не имеется у алгебраических кривых. Таковы, например, точки прекращения и угловые точки.

Исследовать особые точки следующих трансцендентных кривых:

1906.  $y = x^x$ .

1907.  $y = x \ln x$ .

1908.  $y \ln x = 1$ .

1909.  $y = e^{\frac{1}{x}}$ .

1910.  $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ .

1911.  $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ .

1912.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

1913.  $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

1914.  $y = \sin \frac{1}{x}$ .

1915.  $y = x \sin \frac{1}{x}$ .

1916.  $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ .

1917.  $x^y = y^x$ .

При отыскании асимптот кривых следует различать два случая — асимптоты, параллельные оси  $Oy$ , и асимптоты, не параллельные ей. Первые имеют уравнения  $x = x_0$ , где  $x_0$  — то значение  $x$ , при котором  $y = f(x)$  обращается в  $\infty$ . Прямая  $y = ax + b$ , не параллельная оси  $Oy$ , будет асимптотой кривой в том случае, если при  $x \rightarrow \infty$  для точек кривой имеет место равенство

$$y = ax + b + \varepsilon(x), \quad \text{где } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax)$ .

Найти асимптоты следующих кривых:

$$1918. y = \frac{x}{x-1}. \quad 1919. y = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

$$1920. y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \quad 1921. y = x + \frac{1}{x}.$$

$$1922. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \quad 1923. y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x-a}.$$

$$1924. y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x+b}. \quad 1925. y^3 - x^3 = x^2 + y^2.$$

$$1926. x^3 + y^3 = a^3. \quad 1927. x^3 + y^3 = 3axy.$$

$$1928. x^3 + y^3 + 2y - x = 0. \quad 1929. r\varphi = a.$$

Изучить форму следующих кривых, предварительно решив уравнение кривой относительно одной из координат:

$$1930. y^2 = x^3(2-x). \quad 1931. x^4 + y^4 = a^4.$$

$$1932. x^{2n} + y^{2n} = a^{2n}, \quad n \text{ — целое положительное и большое.}$$

$$1933. x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0.$$

$$1934. x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0.$$

$$1935. y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

$$1936. x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0.$$

$$1937. x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0. \quad 1938. y^4 - 2xy^2 - 3x^2 + x^4 = 0.$$

$$1939. x^4 + y^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0.$$

$$1940. x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0.$$

Изучить форму следующих замкнутых кривых, перейдя к полярным координатам:

$$1941. x^4 + y^4 = 2xy.$$

$$1942. (x^2 + y^2 - 6x)^2 = x^2 + y^2.$$

$$1943. (x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2). \quad (\text{Улитка Паскаля.})$$

$$1944. x^4 + y^4 = 8xy^2. \quad 1945. x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

$$1946. (x^2 + y^2)^3 = 27x^3y^2. \quad 1947. (x^2 + y^2)^2 = xy.$$

При исследовании кривых с ветвями, уходящими в бесконечность, важно выяснить, имеются ли асимптоты и каково расположение далёких частей кривой относительно асимптот. Следующие примеры указывают наиболее удобные пути исследования.

1. Кривая  $x^4 - 2x^3y + x^2y^2 = y$ .

Деля на  $x^2$  и извлекая корень, получаем:  $x - y = \pm \frac{\sqrt{y}}{x}$ ,  $y = x \pm \frac{\sqrt{y}}{x}$ .

Если кривая имеет асимптоту  $y = ax + \beta$ , то при  $x \rightarrow \infty$  величина отношения

$\frac{y}{x} \rightarrow a$ . Поэтому слагаемое  $\frac{\sqrt{y}}{x}$  представляет величину меньшего порядка,

чем  $x$ . Следовательно,  $y \approx x$ . Внося это первое приближение в правую

часть равенства для  $y$ , получаем:  $y = x \pm \frac{\sqrt{x}}{x} + x \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$ . Это — второе

приближение для  $y$  при больших значениях  $|x|$ . Оно показывает, что кривая имеет асимптоту  $y = x$ . При этом она приближается к ней: только при  $y \rightarrow +\infty$  двумя ветвями — сверху и снизу.

У той же кривой есть и другая асимптота. Разделив уравнение кривой на  $(x - y)^2$  и извлеки корень, находим:  $x = \frac{\pm \sqrt{y}}{x - y}$ . Если  $x$  оставлять

ограниченным, то отсюда при  $|y| \rightarrow \infty$  следует, что  $x \approx \pm \frac{\sqrt{y}}{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$ .

Это показывает, что у кривой есть асимптота  $x = 0$ . При этом кривая приближается к ней в сторону её верхней половины, при  $y \rightarrow +\infty$ . Приближение выполняется двумя ветвями — справа и слева.

2. Кривая  $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ .

Совокупность слагаемых высшей степени  $x^3 + y^3$  имеет линейный множитель  $x + y$ . Это даёт одну асимптоту. Деля на  $x^3 - xy + y^2$ , находим:

$x + y = \frac{x^2 + y^2}{x^3 - xy + y^2}$  или  $y = -x + \frac{x^2 + y^2}{x^3 + xy + y^2}$ . В правой части второе

слагаемое можем отбросить, как величину низшего порядка. Таким образом, получаем первое приближение для  $y$  при  $x \rightarrow \infty$ :  $y \approx -x$ . Подставляя его в правую часть формулы для  $y$ , получаем:

$$y \approx -x + \frac{x^2 + x^2}{x^3 + x^2 + x^2} = -x + \frac{2}{3}.$$

Это — второе приближение для  $y$ . Подставляя его в правую часть формулы для  $y$ , получаем:

$$\begin{aligned} y &\approx -x + \frac{x^2 + \left(-x + \frac{2}{3}\right)^2}{x^3 - x\left(-x + \frac{2}{3}\right) + \left(-x + \frac{2}{3}\right)^2} = -x + \frac{2x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}}{3x^2 - 2x + \frac{4}{9}} = \\ &= -x + \frac{2}{3} \frac{1 - \frac{2}{3x} + \frac{2}{3x^2}}{1 - \frac{2}{3x} + \frac{4}{27x^2}} = -x + \frac{2}{3} + \frac{4}{81x^2}. \end{aligned}$$

Это — третье приближение для  $y$ . Оно показывает, что кривая имеет асимптоту  $y = -x + \frac{2}{3}$ . При этом она приближается к ней в обе стороны: при

$x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ , оставаясь выше, чем асимптота.

Изложенные приёмы дают простой способ исследования асимптот алгебраических кривых. Каждая из них получается выделением линейного множителя, в совокупности членов уравнения, имеющих высшую степень относительно  $x$  и  $y$  одновременно.

Более трудно исследование параболических ветвей кривой, по которым кривая уходит в бесконечность, не приближаясь к какой-нибудь прямой.

Наиболее полный способ исследования основан на разложении  $y$  в ряд по убывающим целым или дробным степеням  $x$ .

Способ получения такого разложения принадлежит Ньютону, а полное доказательство сходимости этого разложения при достаточно больших значениях  $|x|$  было дано лишь в середине XIX в. французским учёным Пуанкаре. Этот способ даёт заодно и исследование асимптот, если они существуют. Мы рассмотрим его в применении к кривой

$$x^4 + x^3y = y^3 + xy.$$

Если заменить здесь  $y$  на  $x^\sigma$ , четыре члена уравнения обратятся в степени  $x$  с показателями

$$4, 3 + \sigma, 3\sigma, 1 + \sigma. \quad (*)$$

Приравнявая эти показатели попарно друг другу, найдём такие значения  $\sigma$ :

1,  $\frac{4}{3}$ , 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ . При этих значениях  $\sigma$  числа (\*) дадут такие четвёрки чисел:

$\sigma$	4	$3 + \sigma$	$3\sigma$	$1 + \sigma$
1	4	4	3	2
$\frac{4}{3}$	4	$\frac{13}{3}$	4	$\frac{7}{3}$
3	4	6	9	4
$\frac{3}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

В каждой строчке этой таблицы должны находиться по крайней мере два равных числа. Выбираем те строчки, где эти равные числа больше остальных чисел той же строчки. Таких строчек две — при  $\sigma = 1$  и при  $\sigma = \frac{3}{2}$ . Каждая из них даёт разложение искомого вида. При  $\sigma = 1$  разложение будет иметь вид:

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \dots, \quad (1)$$

а при  $\sigma = \frac{3}{2}$  — вид:

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx + cx^{\frac{1}{2}} + d + ex^{-\frac{1}{2}} + fx^{-1} + \dots \quad (2)$$

Коэффициенты находятся обычными приёмами.

Для получения разложения (1) удобно в уравнении  $x^4 + x^3y = y^3 + xy$  положить  $y = \frac{u}{x}$ ,  $x = \frac{1}{\xi}$ . После этого оно переходит в такое:

$$1 + u = \xi u^3 + \xi^2 u. \quad (3)$$

При этих обозначениях разложение (1) принимает вид:

$$u = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + \dots$$



Отсюда находим:

$$u^2 = A^2 + 2AB\xi + (2AC + B^2)\xi^2 + \dots,$$

$$u^3 = A^3 + 3A^2B\xi + (3A^2C + 3AB^2)\xi^2 + \dots$$

Подставляя эти разложения в уравнение (3), получаем:

$$1 + A + B\xi + C\xi^2 + \dots = \xi [A^3 + 3A^2B\xi + 3(A^2C + AB^2)\xi^2 + \dots] + \xi^2(A + B\xi + C\xi^2 + \dots).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$  в обеих частях равенства, находим

$$1 + A = 0, \quad B = A^3, \quad C = 3A^2B + A, \quad D = 3(A^2C + AB^2) + B, \dots$$

Отсюда получаются значения коэффициентов:

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = -4, \quad D = -16, \dots$$

Разложение (1) принимает вид

$$v = -x - 1 - \frac{4}{x} - \frac{16}{x^2} - \dots$$

Оно показывает, что у кривой имеется асимптота  $y = -x - 1$ . При этом, если  $x \rightarrow +\infty$ , то ветвь кривой приближается к асимптоте, идя снизу, а при  $x \rightarrow -\infty$ , — идя сверху.

Для получения разложения (2) в уравнении  $x^4 + x^3u = u^3 + xu$  удобно положить  $x = \frac{1}{\xi^2}$ ,  $u = \frac{u}{\xi^3}$ . После этого оно переходит в такое:

$$\xi + u = u^3 + u\xi^4. \quad (4)$$

Разложение (2) принимает вид:

$$u = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + \dots$$

Отсюда получаем:

$$u^2 = a^2 + 2ab\xi + (2ac + b^2)\xi^2 + (2ad + 2bc)\xi^3 + \dots,$$

$$u^3 = a^3 + 3a^2b\xi + (3a^2c + 3ab^2)\xi^2 + (2a^2d + 6abc + b^3)\xi^3 + \dots$$

Подставляя эти разложения в равенство (4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ , получим:

$$a = a^3, \quad 1 + b = 3a^2b, \quad c = 3a^2c + 3ab^2, \quad d = 2a^2d + 6abc + b^3, \dots$$

Отсюда, так как  $a \neq 0$ , получаем две системы решений:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{3}{8}, \quad d = 1, \dots;$$

$$a = -1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{8}, \quad d = 1, \dots$$

Поэтому разложение (2) имеет вид:

$$y = x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\sqrt{x} + 1 + \dots \quad (5)$$

Здесь  $\sqrt{x}$  может иметь каждое из значений  $+\sqrt{x}$  и  $-\sqrt{x}$ .

Полученный результат показывает, что у данной кривой имеются две бесконечные ветви, уходящие в бесконечность при  $x \rightarrow +\infty$ , так что расстояние между ними и кривыми  $y = \pm x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x \mp \frac{3}{8}\sqrt{x} + 1$  стремится к нулю.

**Замечание.** В таблице, из которой мы получили значения  $\sigma = 1$  и  $\sigma = \frac{3}{2}$ , имеются значения  $\sigma = 3$  и  $\sigma = \frac{1}{2}$ , при которых равные значения являются наименьшими среди чисел соответствующей строчки. Они дают разложения, сходящиеся при достаточно малых значениях  $|x|$  и расположенные по возрастающим степеням  $x$ . Эти разложения имеют вид:

$$y = A\lambda^3 + Bx^4 + Cx^5 + D\lambda^6 + Ex^7 + \dots,$$

$$y = ax^{\frac{1}{2}} + bx + cx^{\frac{3}{2}} + dx^2 + ex^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Коэффициенты их находятся подобными же приёмами, после чего первое разложение даёт равенство:

$$y = x^3 + x^5 - x^6 + x^7 + \dots$$

Это равенство показывает, что в начале координат кривая имеет соприкосновение четвёртого порядка с кривой  $y = x^3$  и подобно ей имеет точку перегиба.

Другое разложение в данном случае геометрического смысла не имеет, так как среди его коэффициентов имеются мнимые, — в частности,  $a = \pm i$ .

Разложения указанного типа дают наиболее сильное средство при изучении кривой в окрестности особой точки, которая путём переноса координат помещена в начале координат.

Построить кривые:

1948.  $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$ .

1949.  $4y^2 = 4x^2y + x^5$ .

1950.  $x^5 + 5ax^4 - 16a^3y^2 = 0$ .

1951.  $y^3 - x^2y + x^5 = 0$ .

1952.  $y^5 + x^4 = xy^2$ .

1953.  $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$ .

1954.  $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$ .

1955.  $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$ .

1956.  $(x^2 - y^2)^2 = 2x$ .

1957.  $x^2(x - y)^2 + y = 0$ .

1958.  $x^3y^3 = x - y$ .

1959.  $x^2y^2 + x - 2y = 0$ .

1960.  $(2x + y)^2(x + y) = x$ .

1961.  $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$ .

1962.  $3x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 2x = 0$ .

1963.  $xy(x - y) + x + y = 0$ .

1964.  $x^2y^2 + y = 1$ .

1965.  $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$ .

1966.  $xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 12$ .

1967.  $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ .

1968.  $(x^2 - y^2)^2 = 4xy$ .

1969.  $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$ .

1970.  $x^4 - y^4 + xy = 0$ .

1971.  $x^2(x^2 + y^2) = 4(x - y)^2$ .

1972.  $x^4 - y^4 = 4y^2 - x^2$ .

1973.  $x^2y^3 = (y + 1)^2(4 - y^2)$ .

1974.  $(x^2 - 1)y^2 = x^4 - 4x^2$ .

1975.  $x^2(y - 2)^2 + 2xy = y^2$ .

1976.  $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^3$ .

1977.  $(x + 1)(x + 2)y^2 = x^2$ .

1978.  $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$ .

1979.  $(2a - x)y^2 = x^3$ .

1980.  $x^3 + y^3 = 3x^2$ .

1981.  $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$ .

1982.  $x^4 - y^4 = 4x^2y$ .

1983.  $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$ .

1984.  $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ .

1985.  $x^2y^3 = x^2 + y^2$ .

1986.  $x^5 + y^5 = xy^2$ .

1987.  $x^4 + 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ .

Изучить следующие кривые, уравнения которых даны в параметрической форме или могут быть заданы в такой форме:

1988.  $x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = t - \frac{t}{1+t^2}$ .

$$1989. x = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}, y = \frac{t}{t+1}.$$

$$1990. x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, y = \frac{t}{t+1}. \quad 1995. x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$1991. x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}. \quad 1996. x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

$$1992. x = \frac{t^2}{t^2-1}, y = \frac{t^2+1}{t+2}. \quad 1997. x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}, y = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}.$$

$$1993. x = \frac{t^2-3}{t^2+1}, y = \frac{t(t^2-3)}{t^2+1}. \quad 1998. y^2 = a^2 \sin \frac{y}{x}.$$

$$1994. x = \frac{t-t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^2-t^3}{1+t^2}. \quad 1999. y^2 = a^2 \cos \frac{y}{x}.$$

2000. Исследовать линию  $xy = x^y$ , заметив, что она распадается на прямую  $y = x$  и кривую

$$x = (1 + \sigma)^{\frac{1}{\sigma}}, y = (1 + \sigma)^{\frac{1}{\sigma} + 1}.$$

## § 7. Кривые двойкой кривизны: касательная прямая и нормальная плоскость

2001. Показать, что линия

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad z = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$$

лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

2002. При каком соотношении между коэффициентами  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  кривая

$$\begin{aligned} x &= a\varphi(t) + b\psi(t) + c\omega(t) + d, \\ y &= a_1\varphi(t) + b_1\psi(t) + c_1\omega(t) + d_1, \\ z &= a_2\varphi(t) + b_2\psi(t) + c_2\omega(t) + d_2 \end{aligned}$$

лежит в плоскости?

2003. Показать, что кривая  $x = \sin 2\varphi, y = 1 - \cos 2\varphi, z = 2 \cos \varphi$  лежит на поверхности шара.

2004. Показать то же для кривой

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}.$$

2005. Перевести в параметрическую форму уравнение кривой Вивиани, определённой пересечением шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  и цилиндра  $x^2 + y^2 = ax$ , положив  $x = a \sin^2 t$ .

2006. Доказать, что проекция предыдущей кривой на плоскость  $xOz$  есть парабола.

2007. Найти проекцию на плоскость  $xOy$  линии пересечения параболоида  $z = x^2 + y^2$  и плоскости  $x + y + z = 1$ .

2008. Найти проекцию линии  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, z = 2t$  на плоскость  $xOy$ .

**2009.** Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

на плоскость  $yOz$  есть синусоида.

**2010.** Доказать, что при переносе начала координат в точку  $O_1(0, 0, b\beta)$  и повороте осей абсцисс и ординат вокруг оси  $O_1z_1$  на угол  $\beta$  уравнениям винтовой линии  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  можно придать вид:  $x_1 = a \cos t_1, y_1 = a \sin t_1, z_1 = bt_1$ . Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

**2011.** Найти уравнение касательной к кривой

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

**2012.** Найти касательную к предыдущей кривой, параллельную плоскости  $x + 3y + 2z = 0$ .

**2013.** Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ .

**2014.** У кривой  $x = -t \cos t + \sin t, y = t \sin t + \cos t, z = t + 1$  найти точки, в которых касательная параллельна плоскости  $yOz$  или  $xOz$ .

**2015.** Найти касательную к кривой  $x^2 + y^2 = 10, y^2 + z^2 = 25$  в точке  $(1, 3, 4)$ .

**2016.** Найти касательную к кривой  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, x^2 + 2y^2 = z$  в точке  $(-2, 1, 6)$ .

**2017.** Найти касательную к кривой  $x^2 + y^2 = z, x = y$  в точке  $(m, m, 2m^2)$ .

**2018.** Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой  $x^2 = 2az, y^2 = 2bz$ .

**2019.** Такой же вопрос для круга  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = mx$ .

**2020.** К кривой  $y^2 = 2px, z^2 = 2qx$  проведена касательная в точке, где  $x = \frac{p+q}{2}$ . Найти её длину от точки касания до плоскости  $x = 0$ .

**2021.** Найти нормальную плоскость у кривой  $z = x^2 + y^2, y = x$ .

**2022.** В точке, где  $x = \frac{p}{2}$ , найти нормальную плоскость к кривой  $y^2 = 2px, x^2 + z^2 = a^2$ .

**2023.** Доказать, что нормальные плоскости кривой  $x = a \cos t, y = a \sin a \sin t, z = a \cos a \sin t$  проходят через прямую  $x = 0, z + y \operatorname{tg} a = 0$ .

**2024.** Доказать, что кривая  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  пересекает все образующие конуса  $x^2 + y^2 = z^2$  под одним и тем же углом.

**2025.** При каком  $a$  кривая  $x = e^{at} \cos t, y = e^{at} \sin t, z = e^{at}$  пересекает все образующие конуса  $x^2 + y^2 = z^2$  под углом  $45^\circ$ ?

**2026.** Доказать, что линии пересечения цилиндров  $y^2 + z^2 = m^2$  с поверхностью  $xy = az$  пересекают все образующие этой поверхности, принадлежащие одной системе, под прямым углом.

**2027.** Линия  $x = a \operatorname{tg} t$ ,  $y = b \cos t$ ,  $z = b \sin t$  расположена на поверхности параболоида. Доказать, что она пересекает все образующие одной системы под прямым углом.

**2028.** Кривая, называемая локсодромией, определяется уравнением  $\varphi = a \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$ , где  $\theta$ —широта, а  $\varphi$ —долгота точки на шаре.

Доказать, что она пересекает меридианы шара под углом  $\alpha$ , тангенс которого равен  $a$ .

Стереографическая проекция состоит в следующем. Верхняя точка шара  $x^2 + y^2 + z^2 = az$ , т. е. точка  $A(0, 0, a)$  соединяется прямой с произвольной точкой  $M(x, y, 0)$  плоскости  $xOy$ . Точка  $M_1$ , в которой прямая  $AM$  пересекает поверхность шара  $x^2 + y^2 + z^2 = az$ , является изображением на шаре точки  $M$  плоскости  $xOy$ , а точка  $M$  является изображением точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , лежащей на шаре. Таким образом, стереографическая проекция даёт взаимно однозначное соответствие точек плоскости и шара, за исключением точки  $A$ , лежащей на вершугу шара. При этом

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad y_1 = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad z_1 = \frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

**2029.** Доказать, что стереографическая проекция даёт конформное изображение, т. е. что линии на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их изображения на шаре.

**2030.** Доказать, что кривая  $r = e^{m\varphi}$ , расположенная на плоскости  $xOy$ , где полярная ось совпадает с положительной частью оси  $Ox$ , при стереографической проекции переходит в локсодромию.

**2031.** Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности на плоскости. При этом прямые считаются за частные случаи окружностей.

**2032.** Центральная проекция шара  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  на плоскость  $xOy$  состоит в следующем. Произвольная точка  $M(x, y, 0)$  плоскости  $xOy$  соединяется прямою  $AM$  с центром шара  $A(0, 0, a)$ . Точка  $M_1$ , в которой  $AM$  пересекает шар, принимается за изображение точки  $M$ , и обратно. Доказать, что эта проекция не есть конформное изображение.

**2033.** Доказать, что касательная к кривой  $x^2 = 3y$ ,  $2xy = 9z$  образует постоянный угол с некоторым определённым направлением.

**2034.** Координаты точек некоторой кривой удовлетворяют соотношению

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (xdx + ydy + zdz)^2.$$

Доказать, что касательные к этой кривой касаются шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**2035.** Доказать, что касательные к кривой

$$x = a(\sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - \cos t), \quad z = be^{-t}$$

пересекают  $xOy$  по окружности  $x^2 + y^2 = 4a^2$ .

Сферической индикатрисой касательных данной кривой называют геометрическое место концов единичных векторов, проведённых из начала координат и параллельных этим касательным.

**2036.** Найти сферическую индикатрису касательных винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

**2037.** Тот же вопрос для кривой

$$x = 2t - \sin 2t, \quad y = \cos 2t, \quad z = 4 \sin t.$$

## § 8. Кривые двойкой кривизны: соприкасающаяся плоскость, нормаль и бинормаль

В дальнейшем будут приняты следующие обозначения. Запись  $P(b, m, n)$  будет означать, что у вектора  $P$  проекции на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  равны  $b$ ,  $m$  и  $n$ . Радиус-вектор, идущий из начала координат  $O$  в переменную точку  $M$ , будет обозначаться просто через  $M$ . Таким образом,  $\vec{OM} = M = M(x, y, z)$ .

Если координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  переменной точки  $M$ , каждая в отдельности, являются функциями от параметра  $t$ , т. е. если  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \omega(t)$ , то при изменении  $t$  точка  $M$  описывает кривую. В этом случае можем писать  $M = f(t)$ . Здесь  $f(t)$  означает вектор, проекции которого на оси являются данными функциями от времени. Дифференцирование вектора по переменному  $t$  означает дифференцирование его проекций по  $t$ :

$$M' = \frac{dM}{dt} = M'(x' \ y' \ z') = M' \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

$$M'' = M''(x'', y'', z'') \text{ и т. д.}$$

При дифференцировании произведений и сумм применимы правила обыкновенного дифференцирования:

$$(M + N)' = M' + N', \quad (C_1 M + C_2 N)' = C_1 M' + C_2 N',$$

$$(MN)' = (M'N) + (M'N), \quad [MN]' = [M'N] + [M'N].$$

Здесь  $(MN)$  и  $[MN]$  означают соответственно скалярное и векторное произведения. В частности, из равенства  $(M)^2 = C$  следует, что  $2(MM') = 0$ , т. е. что у вектора  $M$ , длина которого постоянна, вектор  $M'$  перпендикулярен к вектору  $M$ . Из определения касательной, как предельного положения секущей, следует, что вектор  $M'$  направлен по касательной к кривой, данной уравнением  $M = \vec{OM} = f(t)$ .

Переменная  $s$ , для которой  $\frac{ds}{dt} = [M]' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ , т. е. у которой  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , является длиной дуги кривой, отсчитываемой от некоторой начальной точки. Если переменную  $t$  считать временем, то величина  $\frac{ds}{dt} = v$  есть скорость движения точки  $M$  по кривой  $M = f(t)$ .

В равенстве  $M' = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\xi$  единичный вектор  $\xi$  направлен по касательной, идущей в сторону возрастающих дуг. Дифференцируя его, получаем:

$$M'' = v \frac{d\xi}{dt} + \xi \frac{dv}{dt} = \xi \frac{dv}{dt} + v \frac{d\xi}{ds} \frac{ds}{dt} = \xi v' + \frac{d\xi}{ds} v^2.$$

Полагая  $\left| \frac{d\xi}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$ , имеем:  $\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\rho} \eta$ , где  $|\eta| = 1$ , и

$$M'' = \xi v' + \eta \frac{v^2}{\rho}.$$

Здесь  $\eta$  перпендикулярен к  $\xi$ . Нормаль к кривой, по которой направлен вектор  $\eta$ , называется главной нормалью. Величина  $\frac{1}{\rho}$  по определению кри-

визны кривой равна кривизне, а  $\rho$  есть радиус кривизны. Перемножая векторно соответствующие равенства для вектора скорости  $\mathbf{M}'$  и ускорения  $\mathbf{M}''$ , получаем:

$$[\mathbf{M}'\mathbf{M}''] = [\xi\eta] \frac{v^3}{\rho} = \zeta \frac{v^3}{\rho}; |\zeta| = 1.$$

Так как  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'(x', y', z')$  и  $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}''(x'', y'', z'')$ , то проекции  $[\mathbf{M}'\mathbf{M}'']$  равны величинам  $A = y'z'' - z'y''$ ,  $B = z'x'' - x'z''$ ,  $C = x'y'' - y'x''$ . Отсюда

$$\text{следует, что } \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Единичный вектор  $\zeta$ , равный  $[\xi\eta]$ , перпендикулярен и к касательной и к главной нормали. Он направлен по бинормали.

Три единичных вектора  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  направлены, соответственно, по касательной, главной нормали и бинормали. Они взаимно перпендикулярны и образуют сопровождающий точку  $M$  триэдр, ориентированный так же, как и оси координат. Справедливы поэтому равенства:

$$[\xi\eta] = \zeta, [\eta\zeta] = \xi, [\zeta\xi] = \eta.$$

При этом, как было отмечено,  $\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho}$ .

Дифференцируя равенство  $\zeta = [\xi\eta]$ , получаем:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \left[ \xi \frac{d\eta}{ds} \right] + \left[ \frac{d\xi}{ds} \eta \right] = \left[ \xi \frac{d\eta}{ds} \right] + \left[ \frac{\eta}{\rho} \xi \right] = \left[ \xi \frac{d\eta}{ds} \right].$$

Отсюда следует, что вектор  $\frac{d\zeta}{ds}$  перпендикулярен к  $\xi$ . Кроме того, он перпендикулярен и к  $\eta$ , так как  $|\eta| = 1$ . Поэтому  $\frac{d\zeta}{ds}$  направлен по главной нормали и  $\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\eta}{r}$ .

Величина  $\frac{1}{r}$  называется кручением или второй кривизной кривой.

Дифференцируя равенство  $\eta = [\zeta\xi]$ , получаем:

$$\frac{d\eta}{ds} = \left[ \zeta \frac{d\xi}{ds} \right] + \left[ \frac{d\zeta}{ds} \xi \right] = \left[ \zeta \frac{\eta}{\rho} \right] + \left[ \frac{\eta}{r} \xi \right] = \frac{1}{\rho} [\zeta\eta] + \frac{1}{r} [\eta\xi].$$

Отсюда следует, что  $\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{\rho} - \frac{\zeta}{r}$ . Три полученные формулы:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{\rho} - \frac{\zeta}{r}, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\eta}{r}$$

называются формулами Френе и дают скорости вращений рёбер сопровождающего триэдра при равномерном движении точки по кривой.

Косинусы углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  вектора  $\mathbf{P}(l, m, n)$  с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Поэтому для нахождения углов, образуемых касательной, главной нормалью и бинормалью с осями, достаточно знать векторы, направленные по этим прямым. За такие векторы можно взять следующие три вектора:

$\Xi = \mathbf{M}' = \mathbf{M}'(x', y', z')$  — направлен по касательной;

$[\mathbf{M}'\mathbf{M}''] = \mathbf{Z}(A, B, C)$  — направлен по бинормали;

$\mathbf{H} = [\mathbf{Z}\mathbf{\Xi}] = \mathbf{H}(y'C - z'B, z'A - x'C, x'B - y'A)$  — направлен по главной нормали.

Плоскость, проходящая через точку  $M$  и перпендикулярная к бинормали, называется соприкасающейся плоскостью. В ней расположены касательная и главная нормали. Её уравнение можно написать в таком виде:  $(\mathbf{P}\mathbf{M}'\mathbf{M}'') = 0$ , где  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X-x, Y-y, Z-z)$ , а символ  $(\mathbf{P}\mathbf{M}'\mathbf{M}'')$  означает скалярно-векторное произведение трёх векторов:  $(\mathbf{P}\mathbf{M}'\mathbf{M}'') = (\mathbf{P}[\mathbf{M}'\mathbf{M}''])$ . В явной форме оно имеет вид:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

$A$ ,  $B$  и  $C$  имеют те же значения, что и раньше.

Взяв производную от обеих частей равенства  $\mathbf{M}' = \xi\mathbf{v}' + \eta\frac{\mathbf{v}^2}{\rho}$  и применив формулы Френе, получаем:

$$\mathbf{M}''' = \xi\left(\mathbf{v}'' - \frac{v^3}{\rho^2}\right) + \zeta\left(\frac{\mathbf{v}^2}{\rho}\right)' - \zeta\frac{v^3}{r\rho}.$$

Перемножая скалярно-векторно эти два равенства и равенство  $\mathbf{M}' = \mathbf{v}'$ , получаем:

$$(\mathbf{M}'\mathbf{M}''\mathbf{M}''') = \frac{v^6}{r\rho^2}(\xi\eta\zeta) = -\frac{v^6}{r\rho^2}.$$

Отсюда следует формула для кручения кривой:  $\frac{1}{r} = -\frac{\rho^2}{v^6}(\mathbf{M}'\mathbf{M}''\mathbf{M}''')$  или в явном виде:

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

**2038.** Пользуясь третьей формулой Френе, показать, что кривая, у которой кручение постоянно равно нулю, лежит в плоскости.

Найти соприкасающиеся плоскости кривых:

**2039.**  $y^2 = x$ ,  $x^2 = z$  в точке  $(1, 1, 1)$ .

**2040.**  $y = \varphi(x)$ ,  $z = a\varphi(x) + b$ .

**2041.**  $x^2 = 2az$ ,  $y^2 = 2bz$ .

**2042.**  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$ .

**2043.**  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

**2044.**  $x = at^2 + bt + c$ ,  $y = a_1t^2 + b_1t + c_1$ ,  $z = a_2t^2 + b_2t + c_2$ .

**2045.** Доказать, что соприкасающаяся плоскость линии  $x^2 = \varphi'(t)$ ,  $y^2 = t^2\varphi'(t)$ ,  $z = \varphi(t)$ , расположенной на коноидальной поверхности  $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , совпадает с касательной плоскостью к этой поверхности.

Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривым:

**2046.**  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

**2047.**  $x = y^2$ ,  $z = x^2$  в точке  $(1, 1, 1)$ .

**2048.**  $x = \frac{t^4}{4}$ ,  $y = \frac{t^3}{3}$ ,  $z = \frac{t^2}{2}$ .

**2049.**  $x = \frac{t^2}{2}$ ,  $y = \frac{2t^3}{3}$ ,  $z = \frac{t^4}{2}$  в точке  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ .



**2050.** Кривая  $x = a \operatorname{ch} t \cos t$ ,  $y = a \operatorname{ch} t \sin t$ ,  $z = at$  лежит на поверхности вращения  $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ , называемой катеноидом.

Доказать, что в каждой точке кривой бинормаль совпадает с нормалью к поверхности.

**2051.** Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к кривой  $x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$  имеет постоянное направление.

**2052.** Кривая имеет проекцией на плоскость  $xOy$  синусоиду  $y = \sin x$ . Какому соотношению должны удовлетворять аппликаты  $z$  её точек, чтобы главные нормали были параллельны плоскости  $yOz$ ?

**2053.** По главным нормальям винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  откладываются отрезки данной длины  $l$ . Найти геометрическое место их концов.

**2054.** Найти поверхность, на которой располагаются все главные нормали винтовой линии предыдущей задачи.

**2055.** Тот же вопрос для бинормалей.

Найти радиусы кривизны  $\rho$  у следующих кривых:

**2056.**  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ .

**2057.**  $x = a \operatorname{ch} t \cos t$ ,  $y = a \operatorname{ch} t \sin t$ ,  $z = at$ .

**2058.**  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$ .

**2059.**  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^t$ .

**2060.**  $x = a \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ ,  $y = a \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}$ ,  $z = a(t - \operatorname{th} t)$ .

**2061.**  $x^2 = 2az$ ,  $y^2 = 2bz$ .

**2062.**  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ ,  $y^2 - 2x + z = 0$  в точке  $(1, 1, 1)$ .

**2063.** Найти кручение кривой  $y^2 = x$ ,  $x^2 = z$ .

**2064.** Найти кривизну и кручение кривой  $y = \frac{x^2}{2a}$ ,  $z = \frac{x^3}{6a^2}$ .

**2065.** Тот же вопрос для кривой  $x = 2abt$ ,  $y = a^2 \ln t$ ,  $z = b^2 t^2$ .

**2066.** Доказать, что у сопровождающего триэдра кривой  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $z = e^t$  каждое из рёбер образует с  $Oz$  постоянный угол.

**2067.** При каком условии центр кривизны винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

**2068.** Доказать, что у кривой

$$x = a \operatorname{ch} t \cos t, \quad y = a \operatorname{ch} t \sin t, \quad z = at$$

отрезок нормали от точки на кривой до оси  $Oz$  равен радиусу второй кривизны.

**2069.** Через четыре точки кривой можно провести шар. Если они стремятся к одной точке, то при соответствующих условиях шар этот стремится к некоторому предельному шару, называемому соприкасающимся шаром. Найти его центр и радиус.

**2070.** Найти приближённые с точностью до малых высшего порядка уравнения проекций кривой на три плоскости сопровождающего триэдра вблизи точки касания.

**2071.** Из центра шара проводятся радиусы, параллельные главным нормальям замкнутой кривой, не имеющей особых точек. Доказать, что геометрическое место их концов делит поверхность шара на две равновеликие части. (Якоби.)

## § 9. Поверхности. Их уравнения

**2072.** Поверхности, описанные прямой, проходящей через данную точку  $(a, b, c)$  и данную кривую, называются коническими. Доказать, что их уравнения могут быть представлены в таком виде:

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

**2073.** Поверхности, образованные движением прямой, параллельной вектору  $\mathbf{P}(l, m, n)$  и проходящей через данную кривую, называются цилиндрическими. Доказать, что общий вид уравнения цилиндрических поверхностей такой:

$$f(nx - lz, ny - mz) = 0.$$

**2074.** Доказать, что уравнение поверхностей вращения около оси  $Oz$  имеет вид:  $f(x^2 + y^2, z) = 0$ .

**2075.** Доказать, что уравнение поверхности вращения около прямой  $x = a + lt, y = b + mt, z = c + nt$  имеет вид:

$$f(lx + my + nz, R) = 0,$$

где

$$R = [n(y - b) - m(z - c)]^2 + [l(z - c) - n(x - a)]^2 + \\ + [m(x - a) - l(y - b)]^2.$$

**2076.** Найти уравнение цилиндра, описанного около шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , с образующими, параллельными прямой  $x = lt, y = mt, z = nt$ .

**2077.** Найти уравнение цилиндра с образующими, параллельными прямой  $x = y = z$ , описанного около эллипсоида  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ .

**2078.** Найти уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой кривая  $z = 0, x^2 + y^2 = ay$ , а образующие которой параллельны вектору  $\mathbf{P}(l, m, n)$ .

**2079.** Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке  $(-1, 0, 0)$  и описанной около параболоида  $2y^2 + z^2 = 4x$ .

**2080.** Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке  $(a, b, c)$ , а направляющей — параболу  $z = 0, y^2 = 2px$ .

**2081.** Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке  $(0, 0, -c)$ , а направляющей — лемнискату  $z = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

**2082.** Около параболоида  $x^2 + y^2 = 2z$  описать коническую поверхность с вершиной в точке  $(0, 0, -2)$ .

**2083.** Найти уравнение конической поверхности, описанной около поверхности  $xuz = c^3$  и с вершиной в  $(0, 0, -3c)$ .

Найти уравнения поверхностей, полученных вращением данной кривой вокруг данной оси:

**2084.** Эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси  $Ox$ .

**2085.** Гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси  $Oy$ .

**2086.** Параболы  $y^2 = 2px$  вокруг оси  $Ox$ .

**2087.** Окружности  $(x-a)^2 + y^2 = R^2$  около  $Oy$ .

**2088.** Параболы  $y^2 = 2px$  около  $Oy$ .

**2089.** Лемнискаты  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  около  $Ox$ .

**2090.** Той же кривой около  $Oy$ .

**2091.** Поверхность, происходящая от вращения синусоиды  $x = \sin z$ ,  $y = 0$  около оси  $Oz$ , освещена параллельными лучами, составляющими с  $Oz$  угол  $45^\circ$ . Найти форму тени, отбрасываемой ею на плоскость  $xOy$ .

Параметрическое представление поверхностей, введённое Гауссом, состоит в том, что координаты точек поверхности даются в функции от двух параметров:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v).$$

Следующие вопросы имеют дело с параметрическими уравнениями поверхностей.

**2092.** Уравнение шара можно представить в таком виде:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta.$$

Найти подобную форму уравнения для эллипсоида.

**2093.** Поверхность задана уравнениями

$$x = a \cos^4 u \cos^4 v, \quad y = a \cos^4 u \sin^4 v, \quad z = a \sin^4 u.$$

Найти её уравнение в обычной форме.

**2094.** Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a \cos^3 u \cos^3 v, \quad y = a \cos^3 u \sin^3 v, \quad z = a \sin^3 u.$$

**2095.** Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = b \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = c \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

## § 10. Касательные плоскости и нормали. Огибающие

Если  $f(x, y, z) = 0$  — уравнение поверхности, то вектор

$$N \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

есть вектор, нормальный к поверхности. Плоскость

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

проходящая через точку на поверхности  $(x, y, z)$  и перпендикулярная к этому вектору, есть касательная плоскость к поверхности.

Если координаты точек  $M(x, y, z)$ , лежащих на поверхности, выражены через параметры  $u$  и  $v$  по формулам

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v), \quad (1)$$

то радиус-вектор, проведённый из начала координат  $O$  в переменную точку поверхности  $M$ , есть функция переменных  $u$  и  $v$ . Таким образом; можно писать

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{M}(x, y, z) = \mathbf{f}(u, v). \quad (2)$$

Эта запись означает, что проекции вектора  $\mathbf{M}$  или  $\overrightarrow{OM}$  на оси координат, равные  $x, y$  и  $z$ , представляют соответствующие функции от  $u$  и  $v$ . Иными словами, запись (2) эквивалентна равенствам (1).

Векторы  $\mathbf{M}_u = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}$  и  $\mathbf{M}_v = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$  и вектор, идущий из точки касания  $M(x, y, z)$  в некоторую точку  $M_1(X, Y, Z)$  касательной плоскости, компланарны. Поэтому уравнение касательной плоскости можно написать в таком виде:

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ Y-y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ Z-z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Векторное произведение  $[\mathbf{M}_u, \mathbf{M}_v]$  представляет вектор, направленный по нормали к поверхности. Поэтому для единичного вектора  $\mathbf{n}$ , направленного по нормали, имеет место формула:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{M}_u, \mathbf{M}_v]}{||[\mathbf{M}_u, \mathbf{M}_v]||}.$$

Найти касательные плоскости к поверхностям:

2096.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ .

2097.  $x^2 + y^2 = z^2$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ .

2098.  $xy^2 + z^3 = 12$  в точке  $(1, 2, 2)$ .

2099.  $x^n + y^n + z^n = a^n$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ .

2100.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$ .

2101. Уравнение алгебраической поверхности имеет вид  $f(x, y, z) = 0$ , где  $f(x, y, z)$  — полином. Вводя дополнительно степень вспомогательной переменной  $t$ , можно сделать этот полином однородным, после чего уравнение поверхности принимает вид:  $F(x, y, z, t) = 0$  при  $t = 1$ . Доказать, что уравнение касательной плоскости к этой поверхности можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y + \frac{\partial F}{\partial z} Z + \frac{\partial F}{\partial t} t = 0,$$

где переменное  $t$  после дифференцирования заменено единицей.

**2102.** К поверхности  $xuz = 1$  провести касательную плоскость, параллельную плоскости  $x + y + z - 3 = 0$ .

**2103.** Найти линии, по которым касательная плоскость к поверхности  $xu = az$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  пересекается с поверхностью.

**2104.** Найти уравнение касательной плоскости к косому геликонду  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$ .

**2105.** Найти уравнение касательной плоскости к поверхности  $x = u + v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = u^3 + v^3$  в точке  $(2, 2, 2)$ .

**2106.** Доказать, что касательные плоскости к поверхности  $xuz = a^3$  образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объёма.

**2107.** Доказать, что плоскости, касательные к поверхности  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ , образуют на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

**2108.** Доказать, что у поверхности  $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$  сумма квадратов отрезков, образованных касательной плоскостью на осях, есть величина постоянная.

**2109.** Доказать, что плоскости, касательные к поверхности  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ , проходят через одну и ту же точку.

**2110.** Доказать, что плоскости, касательные к поверхности  $z = x + f(y - z)$ , параллельны одной и той же прямой.

**2111.** Доказать, что отрезок на оси  $Oz$ , образованный плоскостью, касательной к поверхности

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = xnf\left(\frac{y}{x}\right),$$

пропорционален расстоянию точки касания до начала координат.

**2112.** Найти поверхность, на которой лежат касательные к винтовой линии, и доказать, что нормаль к этой поверхности составляет с  $Oz$  постоянный угол.

**2113.** Доказать, что точка пересечения нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$  с плоскостью  $xOy$  одинаково удалена от начала координат и от основания нормали.

**2114.** Отрезок нормали к поверхности  $z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} + b$ , заключённый между поверхностью и плоскостью  $xOy$ , проектируется на  $xOy$ . Доказать, что величина проекции постоянна.

**2115.** Доказать такое же свойство для нормалей к поверхности

$$\begin{aligned}x &= v \cos u - \varphi(u) \cos u + \varphi'(u) \sin u, \\y &= v \sin u - \varphi(u) \sin u - \varphi'(u) \cos u, \\z &= \sqrt{2v}.\end{aligned}$$

**2116.** Из точки  $M$  на поверхности

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z^2 = -r^2 + f(re)$$

проводится нормаль  $MN$  до точки  $N$  на плоскости  $xOy$ , и опускается перпендикуляр  $MP$  на плоскость  $xOy$ . Доказать, что  $\angle NOP$ , где  $O$  — начало координат, равен  $45^\circ$ .

**2117.** Доказать, что у поверхности

$$z^2 = a^2 \arctg \frac{y}{x} + f(x^2 + y^2)$$

площадь треугольника  $NOP$ , полученного таким же путём, как и в предыдущей задаче, есть величина постоянная.

Вектор, нормальный к поверхности  $f(x, y, z) = 0$  в точке  $(x, y, z)$ , имеет проекции на оси, равные  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Поэтому, если у двух поверхностей  $\varphi(x, y, z) = 0$ ,  $\psi(x, y, z) = 0$  в точках их пересечения соблюдается равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

то поверхности пересекаются под прямым углом (ортогональны).

В следующих задачах требуется установить взаимную ортогональность указанных поверхностей (так что, если заданы три поверхности, то надо доказать, что каждая из них пересекается с каждой из остальных под прямым углом).

Доказать ортогональность следующих систем поверхностей:

**2118.**  $xy = az^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = b$ ,  $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$ .

**2119.**  $xyz = a^3$ ,  $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$ .

**2120.**  $xy = az$ ,  $\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = \beta$ ,

$$\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = \gamma.$$

**2121.**  $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = by$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = cz$ .

**2122.**  $x(x^2 + y^2 + z^2) + a(x^2 + y^2 - z^2) = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$ .

**2123.** Через каждую точку  $(x, y, z)$  проходят три поверхности вида  $\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$  при  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , представляющие соответственно эллипсоид и однополостный и двуполостный гиперболоиды. Доказать ортогональность этих поверхностей.

**2124.** Из точек прямой  $y = x$ ,  $z = \frac{\pi}{4}$ , лежащей на поверхности  $y = x \operatorname{tg} z$ , проводятся нормали к поверхности. Доказать, что они располагаются на гиперболическом параболоиде.

**2125.** Такой же вопрос для прямой  $z = h$ ,  $by = x\sqrt{a^2 - h^2}$  и поверхности  $b^2 y^2 = x^2(a^2 - z^2)$ .

**2126.** Найти геометрическое место проекций центра эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  на касательные плоскости.

**2127.** По эллипсоиду предыдущей задачи (при  $a > b > c$ ) катится без скольжения и верчения другой такой же эллипсоид так, что

в один из моментов концы больших полуосей соприкасались, а другие оси были попарно параллельны. Найти геометрическое место центра.

**2128.** Доказать, что поверхность  $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 2xyz$  пересекается шаром  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  по четырём кругам.

Поверхности  $f(x, y, z, a) = 0$ , уравнения которых содержат коэффициент  $a$ , меняющийся от одной поверхности к другой, образуют однопараметрическое семейство поверхностей. Если две бесконечно близких поверхности пересекаются по некоторой линии, то координаты точек этой линии, называемой характеристической линией, удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Исключая параметр  $a$  из этих уравнений, найдём уравнение  $F(x, y, z) = 0$ . Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то она вся лежит на полученной поверхности.

Подобно этому, уравнение  $f(x, y, z, a, b) = 0$  изображает двухпараметрическое семейство поверхностей. Предельное положение точки пересечения трёх близких поверхностей

$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad f(x, y, z, a + \Delta a, b) = 0, \quad f(x, y, z, a, b + \Delta b) = 0$  при  $\Delta a \rightarrow 0$  и  $\Delta b \rightarrow 0$ , т. е. характеристическая точка поверхности семейства, удовлетворяет уравнениям:

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Исключая отсюда параметры  $a$  и  $b$ , получим уравнение поверхности  $F(x, y, z) = 0$ . Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то все её точки удовлетворяют полученному уравнению; но ему могут удовлетворять и другие точки.

Найти огибающую следующих семейств поверхностей:

**2129.** Шаров  $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**2130.** Плоскостей, проходящих через точку  $(\sqrt{2}, 0, 0)$  и удалённых от начала на расстояние, равное единице.

**2131.** Найти огибающую шаров

$$(x - lt)^2 + (y - mt)^2 + (z - nt)^2 = a^2,$$

где  $t$  — переменный параметр.

**2132.** Найти огибающую шаров, большие круги которых расположены на параболоиде  $z = x^2 + y^2$ .

**2133.** Тот же вопрос для параболоида  $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ .

**2134.** Найти огибающую шаров радиуса  $a$ , центры которых лежат на окружности  $x^2 + z^2 = r^2, \quad z = 0$ .

**2135.** Найти огибающую плоскостей, касающихся парабол  $y^2 = 2x, \quad z = 0; \quad y^2 = 2z, \quad x = 0$ .

**2136.** Найти огибающую шаров

$$(x - lt)^2 + (y - mt)^2 + (z - nt)^2 = p^2t^2,$$

где  $t$  — переменный параметр.

**2137.** Найти огибающую эллипсоидов  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  при условии  $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ .

2138. То же при условии  $a + b + c = 1$ .

2139. Найти огибающую плоскостей, образующих при пересечении с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объёма.

2140. Найти огибающую плоскостей, у которых отрезки  $a, b, c$  на осях связаны равенством  $a^n + b^n + c^n = 1$ .

2141. Показать, что круги  $y = tx, x^2 + y^2 + z^2 - 2f(t)x - a^2 = 0$  суть характеристики семейства шаров

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2f(t) + 2f'(t)x - 2f''(t)y - a^2 = 0.$$

## § 11. Линии на поверхностях и кривизна поверхностей

Если координаты точек поверхности даны формулами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v),$$

иными словами, если радиус-вектор  $\vec{OM}$ , или попросту  $M$ , проведённый из начала координат в переменную точку поверхности  $M(x, y, z)$ , дан формулой  $M = f(u, v)$ , то дифференциал длины дуги на поверхности может быть выражен формулой  $ds = M'_u du + M'_v dv$ , где  $M'_u = \frac{\partial M}{\partial u}$ ,  $M'_v = \frac{\partial M}{\partial v}$ . Умножая скалярно само на себя равенство для  $ds$ , получаем формулу:

$$ds^2 = F du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Коэффициенты квадратичной формы Гаусса, стоящей в правой части этого равенства, выражаются формулами:

$$E = M'^2_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = M'_u M'_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = M'^2_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Если обозначить через  $ds_1$  и  $ds_2$  дифференциалы дуг кривых, описываемых на поверхности точкой  $M$  при изменении только одного  $u$  или только одного  $v$ , то элемент площади  $dS$  выразится равенством  $dS = ds_1 ds_2 \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлениями  $ds_1$  и  $ds_2$ . Отсюда следует равенство:

$$dS = |M'_u M'_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Если переменные  $u$  и  $v$  являются функциями одного параметра  $t$ , то точка  $M(x, y, z)$  описывает кривую, лежащую на поверхности, уравнение которой  $M = f(u, v)$ . Дифференцируя это уравнение по  $s$ , где  $s$  — длина указанной кривой, отсчитываемая от некоторой точки, получаем:

$$\frac{dM}{ds} = M'_u \frac{du}{ds} + M'_v \frac{dv}{ds}.$$

Здесь  $\frac{dM}{ds} = \xi$  — единичный вектор касательной.

Дифференцируя ещё раз по  $s$  и учитывая формулу Френе  $\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho}$ , получаем:

$$\frac{\eta}{\rho} = M''_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M''_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + M''_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + M'_u \frac{d^2 u}{ds^2} + M'_v \frac{d^2 v}{ds^2}.$$



Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой, а  $\eta$  — единичный вектор главной нормали.

Умножая скалярно обе части равенства на единичный вектор нормали

к поверхности  $\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{M}'_u \mathbf{M}'_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$ , получаем формулу:

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{(\mathbf{n} \mathbf{M}''_{uu}) du^2 + 2(\mathbf{n} \mathbf{M}''_{uv}) du dv + (\mathbf{n} \mathbf{M}''_{vv}) dv^2}{ds^2}.$$

Обозначая скалярные величины  $(\mathbf{n} \mathbf{M}''_{uu})$ ,  $(\mathbf{n} \mathbf{M}''_{uv})$ ,  $(\mathbf{n} \mathbf{M}''_{vv})$  через  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , получаем равенство

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{D du^2 + 2D_1 du dv + D_2 dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Здесь  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой. Квадратичные формы в знаменателе и числителе называются первой и второй квадратичной формой поверхности. Они введены Гауссом.

Для коэффициентов  $D$ ,  $D_1$  и  $D_2$  из предыдущего вытекают формулы:

$$D = \frac{(\mathbf{M}''_{uu} \mathbf{M}'_u \mathbf{M}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D_1 = \frac{(\mathbf{M}''_{uv} \mathbf{M}'_u \mathbf{M}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D_2 = \frac{(\mathbf{M}''_{vv} \mathbf{M}'_u \mathbf{M}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Числители в этих формулах равны соответственно определителям:

$$\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Если кривая представляет сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности, то  $\theta = 0$ , и из формулы (\*) получается равенство:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{D du^2 + 2D_1 du dv + D_2 dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (**)$$

Существует равенство, верное с точностью до малых высшего порядка:

$h \approx \frac{l^2}{2\rho}$ , где  $\rho$  — радиус кривизны кривой,  $l$  — отрезок касательной от точки касания,  $h$  — расстояние его конца от кривой, считая по перпендикуляру. Из этого равенства и формулы (\*\*) следует простое геометрическое значение обеих квадратичных форм. Если величинам  $du$  и  $dv$  приписывать такие значения, что точка  $(du, dv)$  на плоскости, где по осям координат откладываются  $du$  и  $dv$ , описывает малый эллипс

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = ds^2,$$

размеры которого стремятся к нулю, то проекция точки  $M(x + dx, y + dy, z + dz)$  на касательную плоскость к поверхности описывает окружность радиуса  $ds$  с центром в точке касания. Расстояния точек этой окружности до поверхности, считая по перпендикуляру к плоскости, равны значениям второй квадратичной формы, умноженным на 2.

Из формулы (\*\*) следует, что среди нормальных сечений поверхности существует два, кривизны которых  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$  имеют максимальное

и минимальные значения. Направления этих нормальных сечений взаимно перпендикулярны. Величины  $\rho_1$  и  $\rho_2$  называются главными радиусами кривизны. Величины  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$  удовлетворяют уравнению:

$$(\lambda F - D_1)^2 - (\lambda F - D_1)(\lambda G - D_2) = 0$$

или

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (DG - 2D_1F + D_2E)\lambda + DD_2 - D_1^2 = 0. \quad (***)$$

Величина  $K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$  называется полной, или гауссовой, кривизной поверхности в данной точке. Величина  $H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$  называется средней кривизной поверхности. В обоих выражениях  $\rho_1$  и  $\rho_2$  суть главные кривизны поверхности, взятые с учётом их знака. Из равенства (\*\*) следует, что

$$K = \frac{DD_2 - D_1^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{DG - 2D_1F + D_2E}{EG - F^2}.$$

Найти главные радиусы кривизны следующих поверхностей.

**2142.** Эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  в точке  $(0, 0, c)$ .

**2143.** Параболоида  $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$  в точке  $(0, 0, 0)$ .

**2144.** Геликоида  $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = mv$ .

**2145.** Параболоида  $xy = az$ .

**2146.** Поверхности  $e^z \cos x = \cos y$ .

**2147.**  $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ .

**2148.** Катеноида  $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ .

**2149.** Доказать, что если  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — главные радиусы кривизны в некоторой точке эллипсоида, то на линии пересечения эллипсоида с concentричным шаром  $\sqrt{\rho_1\rho_2} = m(\rho_1 + \rho_2)$ , где  $m$  — постоянная.

**2150.** Омбилической точкой, или точкой закругления, называется точка поверхности, где главные радиусы кривизны равны:  $\rho_1 = \rho_2$ . Найти точки закругления эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**2151.** То же для эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

**2152.** Найти полную кривизну параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

**2153.** Доказать, что средняя кривизна поверхности

$$z = \ln \cos x - \ln \cos y$$

равна нулю.

**2154.** Доказать, что полная кривизна параболоида постоянна для точек пересечения его с соответствующим эллиптическим цилиндром.

**2155.** Найти полную и среднюю кривизны поверхности вращения  $z = f(\rho)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**2156.** Доказать, что поверхность вращения трактрисы

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

вокруг оси  $Ox$  обладает постоянной отрицательной кривизной, равной  $-\frac{1}{a^2}$ .

**Замечание.** Отсюда следует, что на этой поверхности выполняется геометрия Лобачевского.

**2157.** Через вершину параболоида вращения  $y^2 + z^2 = 2px$  проводятся кривые на его поверхности. Найти геометрическое место их центров кривизны.

**2158.** Через точку на поверхности проводится  $n$  нормальных сечений, где угол между последовательными сечениями равен  $\frac{2\pi}{n}$ . Доказать, что арифметическая средняя кривизны сечений не зависит ни от числа  $n$ , ни от направления первого сечения.

**2159.** Линия на поверхности, образующая с плоскостью  $xOy$  в каждой своей точке наибольший из углов, какой в этой точке возможен на поверхности, называется линией наибольшего ската. Доказать, что касательная к ней, нормаль к поверхности и линия, идущая через данную точку параллельно  $Oz$ , лежат в одной плоскости.

**2160.** Доказать, что проекции на плоскость  $xOy$  горизонталей поверхности пересекаются под прямым углом с проекциями линий наибольшего ската.

**2161.** Доказать, что кривые, проекции которых на плоскость  $xOy$  имеют уравнение  $x^{a^2} = Cy^{b^2}$ , где  $C$  — постоянная, являются линиями наибольшего ската для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**2162.** Две поверхности

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

уравнения которых отличаются величиной  $\lambda$ , являются софокусными. Доказать, что линии пересечения эллипсоида с софокусными ему одно- и двуполостным гиперболоидами будут линиями кривизны для эллипсоида.

**2163.** Доказать, что у геликоида задачи 2144 вдоль каждой линии кривизны одна из величин

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + m^2}) \pm v$$

остается постоянной.

**2164.** Линия на поверхности, главная нормаль к которой повсюду совпадает с нормалью к поверхности, называется геодезической. Показать, что на поверхности шара геодезической линией является дуга большого круга.

**2165.** Показать, что на поверхности

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = a \sin u \cos v, \quad z = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - a \sin v$$

для точек геодезической линии выполняется условие:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{c \sin v}}{\cos^2 v \sqrt{a^2 \cos^2 v - c}},$$

где  $c$  — постоянное.

**2166.** Найти аналогичное условие для геодезических линий поверхности вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = f(r).$$


---

## ОТВЕТЫ

1.  $-5$  и  $-3$ . 2.  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ;  $AB = 5$ . 3.  $\cos \theta = 0$ .  
 4.  $-\frac{33}{13}$ . 5.  $-2\sqrt{2}$ . 6.  $5\sqrt{2}$ ;  $\alpha = -45^\circ$ . 7.  $(7, 3)$ . 8.  $(12, -7)$ . 9.  $A(-1, 0)$ ,  
 $B(5, 6)$ . 10.  $(2, -2)$ . 11.  $(8, 1)$ ,  $(0, -3)$ ,  $(-4, 5)$ . 12.  $(3, 10)$ ,  $(-1, 7)$  или  $(9, 2)$ ,  
 $(5, -1)$ . 13.  $(6, \pm 2\sqrt{3})$ . 14.  $(5, 1)$ . 19. Координаты одной из вершин:  
 $\xi = x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2n-2} + x_{2n-1}$ ,  $\eta = y_1 - y_2 + y_3 - \dots - y_{2n-2} + y_{2n-1}$ .  
 20.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$ . 21.  $\frac{\sqrt{130}}{2}$ ;  $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ . 22. 9,5. 23. 11,5. 24.  $(12 \pm 20, 0)$ .  
 25. 49. 26.  $-35$ . 27. 29,5. 28.  $(5, 4)$ . 29.  $x\sqrt{2} = -x_1 - y_1$ ,  $y\sqrt{2} = x_1 - y_1$ .  
 30.  $(-7, 1)$ . 31.  $(x-1)\sqrt{2} = x_1 + y_1$ ,  $(y-1)\sqrt{2} = -x_1 + y_1$ .  
 32.  $(-\frac{3}{2}, -2)$ . 33.  $\alpha = 135^\circ, -45^\circ$ ;  $(4n+3)45^\circ$ . 35.  $(2+5\sqrt{3}, 8)$ . 36. 7.  
 37.  $6\sqrt{2}$ ,  $225^\circ$ ; 4,  $330^\circ$ . 39.  $y = \pm h$ . 40.  $x = \pm h$ . 41.  $y = x$ ,  $x + y - 1 = 0$ .  
 42.  $(5, 7)$ . 43.  $M_1$  выше,  $M_2$  и  $M_4$  ниже,  $M_3$  на прямой. 44.  $y = x - 1$ .  
 45.  $x + 3y - 5 = 0$ . 46.  $x - 3 = 0$ . 47.  $3x - y - 4 = 0$ ,  $3x + 2y - 1 = 0$ ,  
 $3x + 5y - 34 = 0$ . 48.  $2x + 3y - 1 = 0$ . 49.  $x + 2y + 4 = 0$ . 50.  $5x + y - 20 = 0$ ,  
 $x - 5y + 22 = 0$ . 51.  $135^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $15^\circ$ . 52.  $(-1, -1)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(8, -7)$ .  
 53. 10. 54.  $3x + 2y - 7 = 0$ ,  $4x + y - 6 = 0$ . 55.  $x + 2y - 11 = 0$ ,  $2x + y - 5 = 0$ .  
 56.  $3x - 4y + 11 = 0$ ,  $4x + 3y - 2 = 0$ . 57.  $7x - 24y - 62 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ .  
 58.  $2x - 3y + 12 = 0$ ,  $8x - 3y - 24 = 0$ . 59.  $4x - 8y + 25 = 0$ .  
 60.  $4x + 3y + 1 \pm 15 = 0$ . 61.  $\frac{3}{\sqrt{52}}$ . 62.  $2x + 4y - 3 = 0$ . 63.  $12x + 8y - 7 = 0$ .  
 64.  $2x + 3y \pm 6 = 0$ . 65.  $(0, 3)$ ,  $(2, -1)$ . 66.  $x - y + 1 = 0$ ,  $3x + 2y - 7 = 0$ ,  
 $2x + 3y + 7 = 0$ . 67.  $4x - y - 7 = 0$ ,  $x + 3y - 31 = 0$ ,  $x + 5y = 7$ . 68.  $3x + y = 25$ ,  
 $x - 3y = 15$ ,  $y = 2x$ . 69.  $y = x + 3$ . 70.  $3x - 2y + 3 = 0$ ,  $2x + 3y + 2 = 0$ ,  
 $x - 5y + 1 = 0$ . 71.  $2x + 7y - 5 = 0$ . 72.  $31x + 48y = 0$ . 73.  $3x + 4y = 25$ .  
 74.  $2x + 7y = 5$ . 75.  $x = 0$ ,  $y = 0$ . 76.  $x - 7y + 19 = 0$ ,  $7x + y - 17 = 0$ .  
 77.  $7x + y + 4 = 0$ ,  $x - 7y + 6 = 0$ . 78.  $4x + 2y + 1 = 0$ . 79.  $x = y$ . 80. 5.  
 81.  $y = \pm(x - 4)$ . 82.  $5x - 4y + 2 = 0$ ,  $4x - 5y + 1 = 0$ . 83.  $(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5})$ .  
 84.  $3x - 46y + 28 = 0$ ,  $9x + 2y - 28 = 0$ ,  $46x - 3y - 77 = 0$ . 85.  $x = 1$ ,  
 $3x - 4y + 1 = 0$ ,  $x - 8y + 27 = 0$ . 86.  $2x - y + 4 = 0$ . 90.  $-x_1\sqrt{5} = x + 2y - 1$ ,  
 $y_1\sqrt{5} = 2x - y + 1$ . 91.  $(x_1 + y_1)\sqrt{2} + 3 = 0$ ,  $(x_1 - y_1)\sqrt{2} + 1 = 0$ . 97.  $x^2 + y^2 = ay$ .  
 98.  $r = a \sin \varphi$ . 99.  $(3, -4)$ , 5. 100.  $x^2 + y^2 = 10x + 5y$ . 101.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ .  
 102.  $x^2 + y^2 = 25$ . 103.  $x + 2y = 5$ . 104.  $-2x + y = 5$ ,  $x + 2y = 5$ . 105.  $ax = by$ .  
 106.  $x + y = 3 \pm 3\sqrt{2}$ . 107.  $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$ . 109.  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ ;

$$(x-20)^2 + (y-20)^2 = 20^2. \text{ 110. } x^2 + y^2 = 15x. \text{ 111. } (-3, 0). \text{ 112. } (x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$x^2 + (y-a)^2 = \frac{a^2}{2}. \text{ 118. } x^2 + y^2 = ax. \text{ 119. Прямая } n \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} -$$

$$- m \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0. \text{ 120. Эллипс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ 121. Эллипс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{122. } y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}. \text{ 123. } (2a-x)y^2 = x^3. \text{ 124. } (x^2 + a^2)y = a^3. \text{ 125. Если } (\pm a, 0) -$$

данные точки, то искомое уравнение:  $[(x+a)^2 + y^2][(x-a)^2 + y^2] = b^4$ . В полярных координатах:  $r^4 = b^4 - a^4 + 2a^2r^2 \cos 2\varphi$ . **126.** Если  $(\pm a, 0)$  — данные точки, то искомое уравнение:  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^3(x^2 - y^2)$ . **127.** Если  $(0, 0)$  и  $(c, 0)$  — данные точки, то в полярных координатах искомое уравнение:  $r^2(1 - a^2) - 2r(ab + c \cos \varphi) = b^2 - c^2$ . **128.**  $y^2[(a+y)^2 + x^2] = h^2(a+y)^2$ . **129.**  $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ . **130.**  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ . **131.**  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ . **132.**  $x = at - b \sin t$ ,  $y = a - b \cos t$ . **133.**  $x = a[(n+1) \cos t - \cos(n+1)t]$ ,  $y = a[(n+1) \sin t - \sin(n+1)t]$ . **134.**  $x = a[(n-1) \cos t + \cos(n-1)t]$ ,  $y = a[(n-1) \sin t - \sin(n-1)t]$ . **139.**  $bx = \pm ay$ . **140.** Прямая, соединяющая середину высоты с серединой основания. **141.** Прямая, соединяющая середины диагоналей. **142.**  $3x^2 - y^2 + 2ax = a^2$ . **143.**  $x^2 - y^2 + 2xy \operatorname{ctg} \varphi = a^2$ . **144.**  $x + y = 1$ . **145.** Прямая. **148.** Две прямые. **149.**  $x^2 + y^2 = cx$ . **152.**  $x^2 + 4y^2 = 36$ . **153.**  $\sqrt{10}$  и  $\sqrt{6}$ . **154.**  $x^2 + 4y^2 = 65$ . **155.**  $4y = x^2$ . **156.**  $y^2 = 2x$ . **159.** Приблизительно 0,08. **160.**  $5,1 \cdot 10^6$ . **161.** Около 1 см. **162.** Фокусное расстояние 2,5 см. **163.**  $\sqrt{2}$ . **164.**  $\sqrt{3}$ . **165.**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . **166.**  $2x_1y_1 = a^2$ . **167.**  $\sqrt{5}$  и 2.

$$\text{168. } 120^\circ. \text{ 169. } \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ 170. } 3x^2 + 4y^2 = 192. \text{ 171. } 2x^2 - 2y^2 = a^2 - b^2.$$

$$\text{172. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \text{ 173. } b. \text{ 174. } 16x^2 + 25y^2 = 192. \text{ 175. } 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

$$\text{179. } x \pm 2y = 0. \text{ 185. } 60^\circ. \text{ 186. Длины их } \sqrt[4]{2}. \text{ 187. } \sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{2}. \text{ 188. } e^2 =$$

$$= \frac{5\sqrt{13} - 13}{6}. \text{ 189. } y = \pm \frac{x}{\sqrt{17}}, y = \pm \frac{8x}{\sqrt{17}}. \text{ 190. } a = \frac{15}{11}; b = \frac{12}{11}. \text{ 191. } a_1 =$$

$$= b_1 = 2. \text{ 192. } m(2-e) \sin \varphi = (m^2 - 1) \sqrt{e^2 - 1}. \text{ 193. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{6}{5} \sqrt{2}. \text{ 194. } 2a_1 =$$

$$= 17,9; 2b_1 = 17,1. \text{ 200. } y = x - 1. \text{ 201. } \pm 2x + y + 4 = 0. \text{ 202. } x - 2y + 2 =$$

$$= 0, x + 4y + 8 = 0. \text{ 203. } y + 1 = 0, 4x - 5y = 13. \text{ 204. } x - 3 = 0, 10x + 9y +$$

$$+ 24 = 0. \text{ 205. } x - 1 = 0, 5x + 4y + 3 = 0. \text{ 206. } 2x - 3y \pm 5 = 0. \text{ 207. } 10x +$$

$$+ 3y \pm 8 = 0. \text{ 210. Директриса. 212. } \frac{p}{2 \sin \alpha}. \text{ 214. Касательная к вершине.}$$

$$\text{215. а), б) — пары пересекающихся прямых; в) двойная прямая; г) параллельные прямые; е) точка; ж) мнимость. 216. а) мнимость; б) гипербола; в) парабола.}$$

$$\text{217. } k = 1. \text{ 218. } k = \frac{1}{2}. \text{ 219. } \lambda = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}; \sigma x \sqrt{3} - 2y = 0, x - 2\sigma y \sqrt{3} +$$

$$+ 2 = 0; \sigma = \pm 1. \text{ 220. } \lambda = 4\sigma, \mu = -7\sigma, x + \sigma y - 3 = 0, 2x + 2\sigma y - 1 = 0;$$

$$\sigma = \pm 1. \text{ 221. } x + 1 = 0, 2x - y + 1 = 0. \text{ 223. } xy = x + y. \text{ 226. } xy - y^2 - x -$$

$$- 2y + 3 = 0. \text{ 227. } xy + 2y - x - 2 = 0. \text{ 228. } (x - y)^2 = 2x + 2y + 3. \text{ 229. } x^2 +$$

$$+ xy + 6y^2 + 2x + 7y - 17 = 0. \text{ 236. } C(-1, 0); x_1^2 + x_1y_1 - 3 = 0. \text{ 237. } C(2, 1);$$

$$x_1^2 + 3x_1y_1 - 2y_1^2 = 8. \text{ 238. } C(1, -1); x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - 7 = 0. \text{ 241. } C(3, 1);$$

$$\alpha = 45^\circ; x_1^3 + 3y_1^2 = 18. \text{ 242. } C(-4, -1); \alpha = 45^\circ; 4x_1^3 - 2y_1^2 + 23 = 0.$$

$$\text{243. } \alpha = 45^\circ; x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + x_2; y_2^2 = x_2 \sqrt{2}. \text{ 246. } y_1 \sqrt{2} = x + y - 2;$$

$$x_1 \sqrt{2} = x - y - 2; \quad y_1^2 = 4x_1 \sqrt{2}. \quad \mathbf{247.} \quad 5y_1 = 4x + 3y + 5; \quad 5x_1 = 3x - 4y + 7; \\ y_1^2 = 14x_1. \quad \mathbf{248.} \quad y_1 = \frac{3x + 5y - 1}{\sqrt{34}}; \quad x_1 = \frac{-10x + 6y - 7}{2\sqrt{34}}; \quad y_1^2 = \frac{2}{\sqrt{34}} x_1.$$

$$\mathbf{253.} \quad 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36. \quad \mathbf{254.} \quad x_1^2 + 9y_1^2 = 9. \quad \mathbf{255.} \quad x_1^2 + 4y_1^2 = 16. \quad \mathbf{256.} \quad 9x_1^2 + \\ + 4y_1^2 = 324. \quad \mathbf{257.} \quad 9x_1^2 - y_1^2 = 9. \quad \mathbf{258.} \quad 9x_1^2 - 25y_1^2 = 225. \quad \mathbf{259.} \quad 9x_1^2 - 16y_1^2 = \\ = 144. \quad \mathbf{260.} \quad x_1^2 - 9y_1^2 = 9. \quad \mathbf{261.} \quad y_1^2 = 2x_1. \quad \mathbf{262.} \quad (x + y - 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0. \\ \mathbf{263.} \quad (x - y + 1)(x + y - 4) + 2 = 0. \quad \mathbf{264.} \quad [A(x - a) + B(y - b)] \cdot [B(x - a) - \\ - A(y - b)] + k = 0. \quad \mathbf{265.} \quad (x + y)^2 + 5x - y = 0. \quad \mathbf{266.} \quad (x - y)^2 + x - 1 = 0. \\ \mathbf{267.} \quad (x - y)^2 = 8x. \quad \mathbf{268.} \quad 4x^2 - 7xy + 4y^2 - 7x + 8y = 0. \quad \mathbf{271.} \quad (x - 2y - 1)^2 + \\ + (2x - y + 1)^2 = 9. \quad \mathbf{272.} \quad (x + y - 1)^2 + x + 2y - 1 = 0. \quad \mathbf{273.} \quad (x - y + 1)^2 \pm \\ \pm 4(x + y + 1) = 0. \quad \mathbf{274.} \quad (x - y + 1)^2 + 4(x + y - 1)^2 = 8. \quad 4(x + y - 1)^2 + \\ + (x - y - 1)^2 = 8. \quad \mathbf{275.} \quad 3(x + 2y - 4)^2 + 2(x - 3y + 2)^2 = 10. \quad 8(x + 2y - 4)^2 + \\ + 3(x - 3y + 2)^2 = 20. \quad \mathbf{277.} \quad x + y = 1, \quad F(2, 1). \quad \mathbf{278.} \quad F_1(-1, 2), \quad F_2(3, 0); \\ y = 2x, \quad y = 2x - 2. \quad \mathbf{279.} \quad F_1(-2, 4), \quad F_2(0, 0); \quad x - 2y + 14 = 0, \quad x - 2y - 4 = 0. \\ \mathbf{280.} \quad x^2 - 2xy + y^2 + 8x = 0. \quad \mathbf{281.} \quad 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0. \\ \mathbf{282.} \quad 100[(x - 2)^2 + (y - 1)^2] = (x - y - 50)^2. \quad \mathbf{283.} \quad 2xy = 1. \quad \mathbf{284.} \quad \text{Фокусы}$$

$$\text{в точках } \left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right). \quad \mathbf{285.} \quad (5x - 1)^2 + (5y + 3)^2 = 5(x + 2y + 1)^2, \quad (4x + 1)^2 + \\ + (4y + 6)^2 = 5(x + 2y + 1)^2. \quad \mathbf{286.} \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = [2 - x - y \pm \sqrt{2}(x + \\ + y - 1)]^2, \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = [2 - 3x - y \pm \sqrt{2}(x + y - 1)]^2. \quad \mathbf{287.} \quad (x - a)^2 + \\ + (y - a)^2 = 2a^2(x + y + 1)^2, \quad 6a = -1 \pm \sqrt{7}. \quad \mathbf{288.} \quad 9[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] = 25(x - y + 4)^2, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25. \quad \mathbf{289.} \quad (x - y)^2 = 8(x + y). \quad \mathbf{290.} \quad 2x^2 - 2y^2 + 4y - 1 = 0. \\ \mathbf{291.} \quad 2(x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 1. \quad \mathbf{292.} \quad \text{Если директриса } Оу, \text{ данная точка } (a, 0), \text{ то} \\ \text{искомое уравнение: } 4x^2 + y^2 = 4ax. \quad \mathbf{293.} \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1. \quad \mathbf{294.} \quad \text{Гипербола.} \\ \mathbf{295.} \quad x - 2y = 0. \quad \mathbf{296.} \quad x + y - 2 = 0, \quad 5x + 5y - 6 = 0. \quad \mathbf{297.} \quad y \pm 2 = 0, \quad x \pm 2 = 0. \\ \mathbf{298.} \quad 9x + 10y - 28 = 0. \quad \mathbf{299.} \quad x + y - 2 = 0, \quad 7x + 10y - 8 = 0. \quad \mathbf{305.} \quad \text{Окруж-} \\ \text{ность радиуса } \frac{r^2}{R}, \text{ концентрическая с данными.} \quad \mathbf{306.} \quad \text{В теореме Паскаля сторо-}$$

на, обратившаяся в нуль, заменяется касательной в вершине пятиугольника. В теореме Брианшона две стороны, между которыми заключалась обратившаяся в нуль, становятся продолжением друг друга, и теорема становится тривиальной. **311.**  $4x^2 - 5y^2 - 12x + 4 = 0$ . **312.**  $(x + y)^2 + 6x - 26y - 55 = 0$ ,  $(x - y)^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ . **313.**  $xy - x - y - 1 = 0$ . **314.**  $ax = a^2 - b^2$ . **315.**  $x^2 + y^2 = a^2$ . **316.** Фокус. **318.** Если направление параллельно прямой  $y = mx$ , то искомое уравнение  $(x + my)(mx - y) = m(a^2 - b^2)$ . **319.**  $x + y - 1 = 0$ . **320.**  $x^2 + y^2 = y$ . **321.** Парабола. **322.** Парабола. **325.** Окружность. **328.** Парабола. **330.**  $(A - B)xy + Abx + Bcy = 0$ . **331.** Прямая. **334.** Если  $x^2 + y^2 = a^2$  — уравнение данного круга, а  $(c, 0)$  — точка  $A$ , то искомое уравнение:  $(c^2 - a^2)(x^2 + y^2) - 2a^2cx + 2a^4 = 0$ . **335.** Кривая второго порядка. **336.** Эллипс. **341.**  $r = 9$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{9}$ ,  $\cos \beta = -\frac{4}{9}$ ,  $\cos \gamma = \frac{8}{9}$ . **342.**  $r = 11$ . **343.**  $2abc$ . **346.** 13.

$$\mathbf{347.} \quad 60^\circ. \quad \mathbf{348.} \quad \sqrt{\sqrt{3} - 1}. \quad \mathbf{349.} \quad \sqrt{8}. \quad \mathbf{350.} \quad \sqrt{11}. \quad \mathbf{351.} \quad 5; \quad \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}. \quad \mathbf{352.} \quad \cos \theta = \\ = \frac{7}{9}. \quad \mathbf{353.} \quad 90^\circ. \quad \mathbf{354.} \quad -\frac{4}{7}. \quad \mathbf{355.} \quad \left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \\ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right). \quad \mathbf{356.} \quad \left(-\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3}\right). \quad \mathbf{357.} \quad (-3, 2, 3). \quad \mathbf{358.} \quad (7, -1, 7), \\ (4, -4, 2), (1, 2, 4), (-2, 8, 1). \quad \mathbf{359.} \quad (6, -9, -2). \quad \mathbf{360.} \quad 1331; \quad (-9s, 6s, 2s), \\ s = \pm 1. \quad \mathbf{361.} \quad 3x = 3 + x_1 - 2y_1 - 2z_1, \quad 3y = 6 - 2x_1 - 2y_1 - z_1, \quad 3z = 9 + \\ + 2x_1 + y_1 - 2z_1. \quad \mathbf{362.} \quad v = 3375. \quad \mathbf{365.} \quad 6v = 19. \quad \mathbf{366.} \quad 3v = 4. \quad \mathbf{367.} \quad 2s = \sqrt{101}. \\ \mathbf{368.} \quad 2s = 81. \quad \mathbf{369.} \quad 2s = 45. \quad \mathbf{370.} \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1. \quad \mathbf{371.} \quad -6, -3, 2.$$

- 372.**  $x + 2y + 2z = 2$ . **373.**  $5x - 3y - 7z = 0$ . **374.**  $x - 1 = 0$ ,  $y - 1 = 0$ ,  $z - 1 = 0$ ,  $x + y + z = 1$ . **375.**  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .  
**376.**  $\cos(P, XOY) = \frac{1}{3}$ . **377.**  $\sin(P, OX) = \frac{6}{7}$ . **378.**  $\cos \theta = \frac{16}{21}$ .  
**379.**  $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . **380.**  $2x - y - 3z = 0$ . **381.**  $x - y = 0$ . **382.** По  
 разные стороны. **383.** 6. **384.**  $z = 1 \pm 20$ . **385.**  $\sqrt{3}$ . **386.**  $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ .  
**387.**  $x + y - 2z + 1 = 0$ . **388.**  $7z_1 = -2$ ,  $5z_2 = -28$ . **389.**  $(3, -1, 0)$ .  
**390.**  $z + 1 = 0$ . **391.**  $x + y - z - 3 = 0$ . **392.**  $x - 2y + z = 30$ . **393.**  $(1, 2, 3)$ .  
**395.**  $x + y + 2z - 4 = 0$ . **396.**  $3x_1 = -x + 2y - 2z + 7$ ,  $3y_1 = 2x - y - 2z + 1$ ,  $3z_1 = -2x - 2y - z + 2$ . **397.**  $x + y \pm z = a$ . **398.**  $\lambda = \pm \sqrt{2}$ .  
**399.**  $\lambda = 3$ . **402.**  $2x - y - 2z + 4 = 0$ ,  $4x - y - 2z + 2 = 0$ . **404.**  $x - 3z - 2 = 0$ ,  $y - 5z - 5 = 0$ ,  $5x - 3y + 5 = 0$ . **405.**  $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{61}}$ ,  $\cos \beta = \frac{6}{\sqrt{61}}$ ,  $\cos \gamma = -\frac{3}{\sqrt{61}}$ . **406.**  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ . **407.**  $90^\circ$ . **408.**  $0^\circ$ .  
**409.**  $x = t + 1$ ,  $y = -t + 2$ ,  $z = 2t + 1$ . **410.**  $x - 1 = 0$ ,  $y - 2 = 0$ .  
**411.**  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ . **412.**  $2x - y - 3 = 0$ ,  $y - 1 = 0$ . **413.**  $x + y - 2z + 1 = 0$ ,  $x + 2y - z - 2 = 0$ . **414.**  $x - y + z - 2 = 0$ ,  $x + y + 2z - 5 = 0$ . **415.**  $x + y + 3z - 7 = 0$ . **416.**  $x - z + 1 = 0$ . **417.**  $x - y + z = 0$ .  
**418.**  $x - 5y + 5z - 2 = 0$ . **419.**  $x - 2y + z - 1 = 0$ . **420.**  $7x - 26y + 13z = 0$ .  
**421.**  $x + 2y + 1 = 0$ . **422.**  $x + 3y = 0$ ,  $3x - y + 4z - 12 = 0$ . **423.**  $(-7, -5, -11)$ .  
**424.**  $(1, 0, -2)$ . **425.**  $(-5, 2, 4)$ . **426.**  $3x - y + z - 1 = 0$ ,  $x + 2y - z = 0$ .  
**427.**  $(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ . **428.**  $4x = 5$ . **429.**  $x + y + z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + m = 0$ .  
**430.**  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $x - 1 = 0$ . **431.**  $y + 1 = 0$ ,  $2x - z + 1 = 0$ ; длина равна  $\sqrt{5}$ .  
**432.**  $x + y + z = 0$ . **433.**  $y + z - 2 = 0$ ,  $2y + 5y + 4z + 8 = 0$ . **434.**  $5x + 3y - z - 1 = 0$ . **435.**  $x + 2y + 2z - 1 = 0$ . **436.**  $x - z - 2 = 0$ .  
**439.**  $d\sqrt{2} = 3$ . **442.**  $d = 1$ . **443.**  $d\sqrt{2} = 1$ . **446.**  $h\sqrt{3} = 2$ . **448.**  $x = 3 + t$ ,  $y = -2$ ,  $z = 1 + t$  и  $x = 3 - 2t$ ,  $y = -2 + 3t$ ,  $z = 1 + 2t$ .  
**449.**  $x = 1 + 7t$ ,  $y = 2 + 15t$ ,  $z = 3 + 4t$  и  $x = 1 - t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $z = 3 - 2t$ .  
**450.**  $x = 0$ ,  $x + y + z = a$ . **451.**  $a(x - 1) + z = 0$ ,  $(a + 1)(y - 1) + z + 1 = 0$ .  
**456.**  $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$ . **457.**  $x \pm y = 0$ . **458.**  $y + z = 2$ .  
**459.**  $(x - 1)^2 + y^2 = z^2$ . **460.**  $x^2 + xy + xz = x + y$ . **461.**  $2x^2 + z^2 - 3xy + 3xz - 3yz - 5x + 3y - 14z + 9 = 0$ . **462.**  $xy + xz - yz = x$ . **463.**  $4x^2 - 10xy + 4xz + 7y^2 - 5yz + 8z - 10y + 2z = 0$ . **464.**  $y = z$ . **465.**  $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 12xy + 4xz - 4yz + 5x + 23y + 9z + 4 = 0$ . **466.**  $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$ .  
**467.**  $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$ . **468.**  $y = x \lg a$ . **469.**  $b^2y^3 + [x(x + y + z) - b(x + y)]^2 = a^2x^2$ . **470.**  $x^2 + y^2 - xz - yz - z - 1 = 0$ . **471.**  $x^2 + y^2 = xz$ .  
**473.**  $(2x - y - z)^2 + (x - 2y + z)^2 = (x + y + z - 3)^2$ . **474.**  $y^2 = 6x - 9$ .  
**475.** Если лампочка — в точке  $(5, 0, 0)$ , центр абажура — в точке  $(5, 0, -1)$ , радиус его 1,5, а стена — плоскость  $yOz$ , то уравнение тени:  $9z^2 - 4y^2 = 100$ ,  $x = 0$ . **476.**  $(0, 0, 2)$ . **477.**  $(0, 0, 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ . **478.**  $(0, 0, 4)$ .  
**479.**  $x^2 + y^2 = 2(z \pm a)^2$ . **482.**  $y^2 + a^2 = 4az$ ,  $x = 0$ . **483.**  $r^2 = r_1^2$ , где  $r^2 (l^2 + m^2 + n^2) = [m(x - a) - l(y - b)]^2 + [n(x - a) - l(z - c)]^2 + [n(y - b) - m(z - c)]^2$ ,  $r_1^2 (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) = [m_1(x - a_1) - l_1(y - b_1)]^2 + [n_1(x - a_1) - l_1(z - c_1)]^2 + [n_1(y - b_1) - m_1(z - c_1)]^2$ . **484.**  $(5x - 5y - 3)^2 + (5x - 5z + 5)^2 + (5y - 5z + 8)^2 = 98$ . **485.**  $y^2 - x^2 - 4az$ . **486.**  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + Cz^2 + Exz + Fyz + \delta x + 6y + lz + \zeta = 0$ . **487.**  $x^2 + y^2 = 2z + 1$ . **488.**  $x = 24t$ ,  $y = -52t$ ,  $z = 5t$  и  $x = 2z$ ,  $y = -2z$ . **491.**  $A(x - 2)^2 + B(y - 1)^2 + C(z - 1)^2 + D(x - 2)(y - 1) + E(x - 2)(z - 1) + F(y - 1)(z - 1) = 0$  при



условиях:  $A > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2A & D \\ D & 2B \end{vmatrix} > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{vmatrix} > 0$ . **492.**  $[\lambda(2x - 3y + 2) +$

$+ \mu(3y - 2z)]^2 + [\lambda_1(2x - 3y + 2) + \mu_1(3y - 2z)]^2 = 0$ ,  $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu \neq 0$ .

**493.**  $(x + 2y - z + 1)(x - y + z + 1) = 0$ . **494.**  $x + y + 2z + 5 = 0$ ,  $y - 3x - 1 = \pm(x + 1)\sqrt{8}$ . **495.**  $x = 1$ ,  $y = z$  и  $y = 1$ ,  $x = z$ . **496.**  $x - y + 2 = 0$ ,

$x + y + z = 0$  и  $x + y = 0$ ,  $z = 0$ . **497.** Если  $b^2 \geq \frac{pc^2}{q}$ , то искомые прямые:  $x =$

$= \pm \frac{az}{bc} \sqrt{b^2 - \frac{p}{q}c^2}$ ,  $y = \pm z \sqrt{\frac{p}{q}}$ . Если  $b^2 < \frac{pc^2}{q}$ , то таких прямых

нет. **498.**  $4x - 3y - 5z + 4 = 0$ . **499.**  $4x + 2y + 4 + \lambda(y + z) = 0$  при

$\lambda < -5$ . **500.**  $C(1, 1, -1)$ ;  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1 - 2y_1z_1 + 6y_1z_1 = 1$ .

**501.**  $2x_1^2 + 6y_1^2 + 2z_1^2 + 8x_1z_1 + 1 = 0$ . **502.**  $4x_1y_1 + 4x_1z_1 = 1$ . **503.**  $x^2 + x^2 +$

$+ z^2 - x - y + z = 0$ . **504.** Образующие конуса  $5(x + 2)^2 + 20(y - 1)^2 =$

$= 8(5z + 1)^2$ . **505.**  $x^2 + y^3 - z^2 = 4$ . **514.**  $2x - 3y + 2z - 2 = 0$ . **515.**  $x + y +$

$+ z = 6$ . **516.**  $x - y - z = 0$ . **517.**  $z = 0$ ;  $P(l, m, 0)$ . **518.**  $2x + y - z = 0$ .

**519.**  $3x + 1 = 0$ ,  $3z - 2 = 0$ . **520.** Угловые коэффициенты 0, 1 и 0.

**521.**  $x = C$ . **522.**  $z = 1$ ,  $2c = 3y$ . **523.**  $x = 2z - 2$ ,  $y = z - 1$ .

**524.**  $y = C$ . **528.**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm \sqrt{3}$ . **529.**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm 1$ .

**530.**  $(a^2t, b^2t, c^2t)$ ;  $(a^2 + b^2 + c^2)t^2 = 1$ . **531.**  $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \pm \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ .

**535.**  $(\sigma, \alpha, \sigma)$ ,  $\sigma = \pm 1$ . **536.**  $(\sigma, c, -3\sigma)$ ,  $\sigma = \pm 1$ . **537.** Точки,

где  $x^2 + y^2 = 1$ . **540.**  $90^\circ$ . **541.**  $90^\circ$ . **542.**  $\frac{x}{a} = \frac{y}{-b} = \frac{z}{c} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**555.** Куб с ребром  $a\sqrt{3}$ . **556.**  $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$ .

**557.**  $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 3z^2$ ,  $x + y + z = 0$ . **558.**  $x^2 -$

$- 2xy + y^2 - 2(x + y) + 1 = 0$  — парабола. **560.** Его образующие

параллельны вектору  $P(\sqrt{a^2 - b^2}, 0, \sqrt{b^2 - c^2})$ . **563.** Пересечение по-

верхности  $\Phi(x, y, z, t) = 0$ , где  $t = 1$ , и полярной плоскости данной точки:

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}t = 0$ , где  $t$  после дифференцирования поло-

жено равным единице. **564.** Пересечение поверхности  $F(x, y, z) = 0$  и

плоскости  $l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ . **565.** Шар  $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ .

**567.**  $x - y + z - 1 = 0$ . **568.**  $l(x + 2) + m(y - 1) + n(2z + 9) = 0$ .

**569.**  $x + y + z = 0$  и  $lx + my - (l + m)z = 0$ . **573.**  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 49$ .

Новое начало  $O_1(3, -4, -5)$ . **574.**  $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 6$ . Формулы пере-

хода:  $3(x - 1) = 2x_1 + 2y_1 - z_1$ ,  $3y = 2x_1 - y_1 + 2z_1$ ,  $3(z + 1) = -x_1 +$

$+ 2y_1 + 2z_1$ . **575.**  $2x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 2$ . Формулы перехода:  $3x = -x_1 + 2y_1 +$

$+ 2z_1$ ,  $3(y + 1) = 2x_1 - y_1 + 2z_1$ ,  $3(z - 1) = 2x_1 + 2y_1 - z_1$ . **576.**  $x_1^2 + 2y_1^2 -$

$- 3z_1^2 = 6$ . Формулы перехода:  $3(x + 1) = -x_1 + 2y_1 + 2z_1$ ,  $3(y + 1) =$

$= 2x_1 - y_1 + 2z_1$ ,  $3z = 2x_1 + 2y_1 - z_1$ . **577.**  $x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$ . Формулы

перехода:  $x + 1 = \xi$ ,  $y + 1 = \eta$ ,  $z + 1 = \zeta$ ;  $3\xi = -2x_1 - 2y_1 + z_1$ ,  $3\eta =$

$= -2x_1 + y_1 - 2z_1$ ,  $3\zeta = x_1 - 2y_1 - 2z_1$ . **578.**  $x_1^2 + 2y_1^2 = 2z_1$ . Формулы

перехода:  $3(x - 1) = -2x_1 - 2y_1 + z_1$ ,  $3y = -2x_1 + y_1 - 2z_1$ ,  $3z = x_1 -$

$- 2y_1 - 2z_1$ . **579.**  $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$ . Формулы перехода:  $x = \xi$ ,  $y + 1 = \eta$ ,

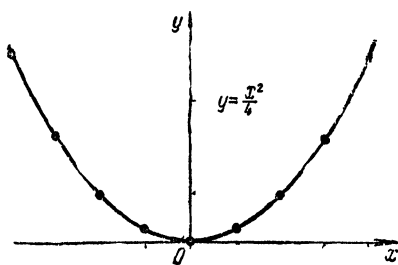
$z + 1 = \zeta$ ;  $3\xi = -2x_1 - 2y_1 + z_1$ ,  $3\eta = -2x_1 + y_1 - 2z_1$ ,  $3\zeta = x_1 - 2y_1 - 2z_1$ .

**580.**  $x_1^2 + 2y_1^2 = 2$ . Формулы перехода:  $x + t + 1 = \xi$ ,  $y - 2t - 1 = \eta$ ,

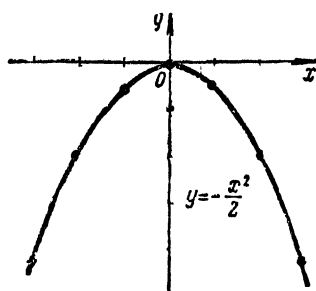
$z - 2t = \zeta$ ;  $3\zeta = 2x_1 + 2y_1 + z_1$ ,  $3\eta = 2x_1 - y_1 - 2z_1$ ,  $3\zeta = -x_1 + 2y_1 - 2z_1$ .  
**581.**  $x_1^2 - y_1^2 = 1$ ,  $x - m = \xi$ ,  $y + 2m = \eta$ ,  $z + 2m = \zeta$ ,  $3\zeta = 2x_1 + 2y_1 + z_1$ ,  
 $3\eta = 2x_1 - y_1 - 2z_1$ ,  $3\zeta = -x_1 + 2y_1 - 2z_1$ . **582.**  $y_1^2 = 2x_1$ . Формулы пере-  
хода:  $x - m = \xi$ ,  $y + 2m = \eta$ ,  $z + 2m = \zeta$  и т. д., как в предыдущей за-  
даче. **583.**  $x_1^2 - y_1^2 = 0$ . Формулы перехода:  $9(x + 7m) = 4x_1 - 4y_1 + 7z_1$ ,  
 $9(y + 4m) = x_1 + 8y_1 + 4z_1$ ,  $9(z + 4m) = -8x_1 - y_1 + 4z_1$ . **584.**  $x_1^2 + y_1^2 = 0$ .  
Формулы перехода:  $3(x - 2m) = x_1 - 2y_1 - 2z_1$ ,  $3(y - 2m) = -2x_1 + y_1 - 2z_1$ ,  
 $3(z - m) = 2x_1 + 2y_1 - z_1$ . **585.**  $x_1^2 = 1$ . **586.**  $x_1^2 = 0$ . В двух последних  
задачах формулы преобразования одинаковы:  $x - 3m + 2n = \xi$ ,  $y + 2m -$   
 $- 6n = \eta$ ,  $z + 6m + 3n = \zeta$ ;  $7\xi = 6x_1 - 3y_1 + 2z_1$ ,  $7\eta = 3x_1 + 2y_1 - 6z_1$ ,  
 $7\zeta = 2x_1 + 6y_1 + 3z_1$ . **587.**  $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2 = 0$ . Формулы перехода:  $x + 2 = x_1$ ,  
 $y - 3 = y_1$ ,  $z - 2 = z_1$ . **588.**  $4y^2 - 2z^2 = x$ . **589.**  $\lambda = \pm 1$ ,  $\mu = \pm \sqrt{2}$ .  
**590.**  $ab + ac + bc = 0$ . **591.**  $y = 0$ .  $\lambda^2 x + \lambda z + (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2 - 1 = 0$ .  
**592.**  $2c = 1 + \sigma\sqrt{5}$ ;  $z = 0$ ,  $2x = (\sqrt{5} - \sigma)y$ ;  $\sigma = \pm 1$ . **594.**  $m < -1$  —  
эллипсоид;  $m = -1$  — эллиптический цилиндр;  $-1 < m < \frac{1}{2}$  — однополост-

ный гиперболоид;  $m = \frac{1}{2}$  — конус;  $\frac{1}{2} < m < 1$  — двуполостный гиперболоид;  
 $m = 1$  — цилиндр;  $m > 1$  — эллипсоид. **595.**  $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = (\alpha + 2\beta + 1)^2$ .  
**596.**  $xy + xz + yz + a^2 = 0$ . **597.**  $A(z + a)x + By(z - a) + C(z^2 - a^2) = 0$  —  
гиперболический параболоид. **599.**  $4(x + y + z)^2 - 3(2x - y - z)^2 +$   
 $+(y - z + 1)^2 = 1$ . **600.**  $(x + 2y + z)^2 + 4(x - z)^2 = 16$ . **601.**  $x^2 + 4y^2 +$   
 $+(z - 2)^2 = 5$ . **602.**  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$ . **603.**  $(x + y + z)^2 + 4(x - y) = 9$ .  
**607.**  $9(x - y)^2 + (x + 7y - 7z)^2 = 9(x + y + z)$  и  $9(x - y)^2 +$   
 $+(x - 5y + 5z)^2 = 9(x + y + z)$ . **608.**  $x - y + (-2 \pm \sqrt{7})(2x - z) = 0$ .  
**609.**  $O(0, 0, 0)$ . **610.**  $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$ . **611.**  $x + 16y - 30z \pm$   
 $\pm \sqrt{33}(x - 6z) = 0$ . **612.**  $x - y = 0$ ,  $x + y - 2z = 1$ . **613.**  $x - 4y - 1 \pm$   
 $\pm \sqrt{3}(x - 2y) = 0$ . **614.**  $y + 2z = 0$ . **615.**  $2x - y - 4z = 0$ . **616.**  $lz \pm kx =$   
 $= \text{const}$ ;  $bcl = \sqrt{b^2 - c^2}$ ,  $abk = \sqrt{a^2 - b^2}$ . **617.**  $y = 0$ ,  $lxc^2 = kza^2$ .  
**618.**  $c^2y^2(a^2 - b^2) = b^2z^2(a^2 + c^2)$ . **619.**  $x = c$ ,  $x + y - z = c$ .  
**620.**  $z + 1 = 0$ ,  $x + 2y = 2$ ;  $z + 1 = 0$ ,  $3x + 4y - 4 = 0$ . **621.**  $z = \alpha$  и  
 $\lambda z + \mu y + z = \beta$ . **622.**  $z = \alpha$  и  $az + bx + cy + f = z + \beta$ . **623.**  $\lambda = \mu = 1$ .  
**624.**  $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 \pm xz\sqrt{3} = 0$ . **625.** Гипербола в плоскости  $xOZ$ .  
**626.**  $y = 0$ ,  $z^2 + px = p^2$ . **627.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 4by - 2cz + 2z \frac{a^2 + b^2}{c} -$   
 $- R^2 = 0$ . **628.**  $x - 2y + z = 0$ ,  $x - (1 \pm \sqrt{3})y = 0$ . **629.**  $x = 0$ .  
**630.**  $2x = q - p$ . **631.**  $x + 1 = \lambda z$ ,  $\lambda(y + 1) = -x$  и  $x + 1 = \lambda x$ .  
 $\lambda(y + 1) = -z$ . **632.**  $x - y - z = \lambda(\sqrt{3} - y + z)$ ,  $\lambda(x - y - z) = 2(\sqrt{3} + y - z)$ .  
**633.**  $4y + 2\eta z = (2 = \zeta\sqrt{6})$  ( $x - 8y - 8z - 2$ ).  $2y - \eta z = (2 - \zeta\sqrt{6})z$ ;  
 $\eta = \pm 1$ ,  $\zeta = \pm 1$ . **634.**  $\theta = 135^\circ$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ . **635.**  $4x^2 + 4y^2 -$   
 $- z^2 - 1 = 0$ . **636.**  $y^2 - z^2 - x = 0$ . **637.**  $(nx - lz)^2 + (ny -$   
 $- mz)^2 + Dz = a^2n^2$ . **638.**  $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2 + b^2}{2ab}xz - 2bx - 2az = 0$ .  
**639.**  $px = -2a^3$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2a$ . **640.**  $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0$ .  
**641.**  $y^2 = 2x - z$ . **642.**  $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 5y - 3z = 0$ . **643.** Парабола.  
**644.**  $2$  и  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . **645.** Окружность радиуса  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **646.**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **648.**  $\frac{3}{2}$ .  
**649.**  $-8$ . **650.**  $6$ . **651.**  $\frac{2}{3}$ . **652.**  $n$ . **653.**  $\frac{m}{n}$ . **654.**  $-1$ .  
**655.**  $\frac{a - b}{2}$ . **656.**  $C_n^k$ . **657.**  $\frac{ps}{qr}$ . **658.**  $\frac{1}{3}$ . **659.**  $\frac{5}{3}$ .

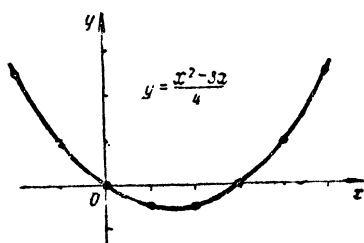
- 660.**  $\frac{1}{n}$ . **661.** 1. **662.** 0. **663.** 0. **664.**  $-1$ . **665.**  $\pm 1$   
 при  $x \rightarrow \pm \infty$ . **666.**  $\pm 1$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ . **667.**  $-\frac{1}{2}$ . **668.**  $-1$ .  
**669.**  $a^2 + a + \frac{1}{3}$ . **670.**  $\frac{1}{3}$ . **671.**  $\frac{1}{2}$ . **672.**  $\frac{4}{3}$ . **673.**  $\frac{1}{3}$ . **674.**  $\frac{1}{2}$ .  
**675.** 1. **676.**  $\frac{1}{2}$ . **677.**  $\frac{15}{2}$ . **678.** 1. **679.**  $\frac{1}{2}$ . **680.** 2. **681.** 0,  
 если  $x \rightarrow +\infty$ , и  $+\infty$ , если  $x \rightarrow -\infty$ . **682.** 0. **683.**  $\pm 1$ . **684.** 0.  
**685.**  $\frac{1}{2}$ . **686.** 0. **687.** 0. **688.**  $-\frac{1}{4}$ . **689.**  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ . **690.**  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .  
**691.**  $\frac{2}{3}$ . **692.**  $\lambda = -1$ ,  $\mu = 0$ . **693.**  $\lambda = \sum_{v=0}^n \sqrt{a_v}$ ,  $\mu = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{b_v}{\sqrt{a_v}}$ .  
**694.**  $\frac{2}{n} a^{\frac{1-n}{n}}$ . **695.**  $\frac{313}{280}$ . **696.**  $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{6}}$ . **697.**  $2n$ . **698.** 1 при  $a > 1$ ,  
 0 при  $a = 1$ ;  $\frac{1}{2}$  при  $a = 1$ . **699.** 0 при  $a \neq 1$ ,  $\frac{1}{2}$  при  $a = 1$ .  
**700.**  $+1$  при  $a > 1$ ,  $-1$  при  $a < 1$ , 0 при  $a = 1$ . **701.** 0. **702.** 4.  
**703.**  $\frac{2}{3}$ . **704.** 5. **705.**  $\frac{m}{n}$ . **706.**  $(-1)^{n-m} \frac{m}{n}$ . **707.** 1. **708.**  $x$ .  
**709.**  $\frac{1}{2}$ . **710.**  $\frac{n^2 - m^2}{2}$ . **711.**  $\frac{2}{\pi}$ . **712.**  $\frac{1}{2}$ . **713.**  $2 \cos a$ . **714.**  $-\sin a$ .  
**715.**  $-2 \cos a$ . **716.** 0. **717.**  $-\frac{1}{4}$ . **718.**  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **719.**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
**720.**  $\frac{1}{4}$ . **721.** 1. **722.**  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2m}$ . **723.**  $-\frac{1}{3}$ . **724.**  $\frac{3}{2}$ . **725.** 4.  
**726.**  $e^2$ . **727.**  $e$ . **728.** 0. **729.**  $e$ . **730.**  $e^3$ . **731.**  $e^{\frac{3}{2}}$ . **732.** 1.  
**733.**  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ . **734.**  $e^{\lambda x}$ . **735.**  $e^{\operatorname{ctg} a}$ . **736.**  $e^{b \operatorname{ctg} a}$ . **737.**  $e^{-2}$ .  
**738.** 1. **739.**  $e$ . **740.** 0. **741.** 0, если  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , оставаясь  $< \frac{\pi}{4}$ ;  $\infty$ ,  
 если  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , оставаясь  $> \frac{\pi}{4}$ . **742.** 0. **743.**  $e^{-1}$ . **744.**  $\frac{M}{10} = 0,0431\dots$   
**745.**  $-1$ . **746.**  $-\frac{\pi^2}{2}$ . **747.**  $\frac{a^2}{\beta^2}$ . **748.**  $2\pi$ . **749.** 1. **750.** 1.  
**751.**  $\frac{\alpha}{\beta}$ . **752.**  $\ln a$ . **753.**  $\ln a$ . **754.**  $\ln^2 a$ . **755.**  $\ln a - \ln b$ .  
**756.**  $\alpha - \beta$ . **757.** 1. **758.**  $a^c \ln a$ . **759.**  $a$  при  $a > 1$ ; 1 при  $a < 1$ .  
**760.**  $\sqrt{ab}$ . **761.**  $\sqrt{a_1 a_2 \dots a_m}$ . **762.** 1. **763.**  $a$ . **776.**  $\frac{1}{4}$ . **777.**  $\frac{1}{9}$ .  
**780.**  $\sqrt{e}$ . **790.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$ . **792.**  $x_n = \frac{a}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right) + \frac{2b}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right)$ ,  
 $x_n \rightarrow \frac{a+2b}{3}$  при  $n \rightarrow \infty$ . **793.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ , если  $a = b \cos \varphi < b$ .  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\varphi}$ , если  $a = b \operatorname{ch} \varphi > b$ . **799.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 - \sqrt{1-x}$ .  
**801.** Если вес отрезка бруса  $AB$  обозначить через  $y$ , то  $y = 2x$  при  $0 \leq x \leq 1$ ;



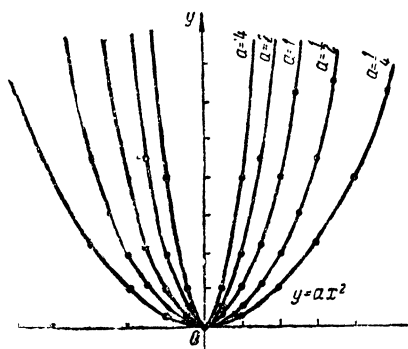
К задаче 816.



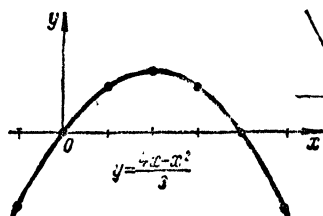
К задаче 817.



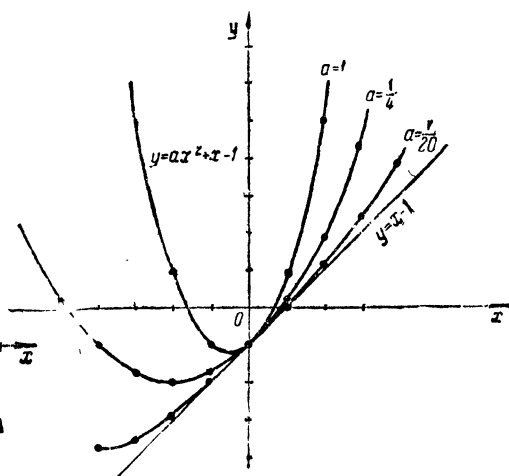
К задаче 818.



К задаче 820.



К задаче 819.



К задаче 821.

$y = \frac{3x+1}{2}$  при  $1 \leq x \leq 3$ ;  $y = x+2$  при  $3 \leq x \leq 4$ . **802.** и при  $x < -1$  и при  $x > 1$ ,  $v$  при  $x > 1$ ,  $y$  при  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $z$  при  $x < 1$  и при  $x > 2$ . **803.**  $y$  при  $x \leq -3$  и  $x \geq 3$ ,  $z$  при любом  $x$ . **804.**  $y$  при  $x \geq 0$ ,  $z$  при любом  $x$ . **805.** Да. **806.** При  $a = 0$ . **807.** При  $x = n^2$ ,

где  $n$  — целое число  $> 0$ . **808.** При  $x = 0$  имеем:  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ , если  $x \rightarrow 0$ ,

оставаясь  $< 0$ , и  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$ , если  $x \rightarrow 0$ , оставаясь  $> 0$ . **809.** При  $x = 1$  имеем  $y \rightarrow 1$ , если  $x \rightarrow 1$ , оставаясь  $< 1$ , и  $y \rightarrow 0$ , если  $x \rightarrow 1$ , оставаясь  $> 1$ .

**810.** и при  $x = \pm 2$ ,  $v$  при  $x = \pm \sqrt{3}$ ,  $w$  при  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ .

**811.**  $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ,  $x = \frac{(2n+1)\pi}{6}$ ,  $n$  — целое. **812.**  $x = n\pi$ ,  $n \neq 0$  целое.

**813.**  $x = 0$ . **814.**  $x = 0$ . **815.** Не имеет.

**816–821** — см. чертежи на стр. 172. **822.** При  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $4ac - b^2 > 0$  кривая имеет вид, изображённый на прилагаемом чертеже. Координаты вершины  $A \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$ . При  $a > 0$  вы-

пуклость вниз, при  $a < 0$  — вверх. При  $4ac - b^2 > 0$  кривая не пересекает  $Ox$ , при  $4ac - b^2 < 0$  пересекает  $Ox$  в двух точках, при  $4ac - b^2 = 0$  касается  $Ox$ . **823–877** и **888–896** см. чертежи на стр. 174–188. **898.** Если корни уравнения  $\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\omega - \beta = 0$  различны, то искомым предел равен  $\omega_1$ , если  $\left| \frac{\alpha - \gamma\omega_1}{\alpha - \gamma\omega_2} \right| < 1$ , и равен  $\omega_2$ ,

если  $\left| \frac{\alpha - \gamma\omega_1}{\alpha - \gamma\omega_2} \right| > 1$ . Если  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , то предел равен  $\omega$ . **899.**  $y' = 6x^2 - 10x + 7$ . **900.**  $y' = 4x^3 - 6x$ .

**901.**  $y' = 1 - x + x^2 - x^3$ . **902.**  $y' = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$ . **903.**  $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$ .

**904.**  $y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ . **905.**  $y' = \frac{5-12x}{x^6}$ . **906.**  $y' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$ . **907.**  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**908.**  $y' = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$ . **909.**  $y' = \frac{7}{8\sqrt{x}}$ . **910.**  $y' = x^2 e^x$ . **911.**  $y' = x \cos x + \sin x$ .

**912.**  $y' = x^2 \cos x$ . **913.**  $y' = \ln x$ . **914.**  $y' = x^2 \ln x$ . **915.**  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} +$

$+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ . **916.**  $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ . **917.**  $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ . **918.**  $y' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$ .

**919.**  $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ . **920.**  $x' = 2e^x \sin x$ . **921.**  $y' = na(ax+b)^{n-1}$ .

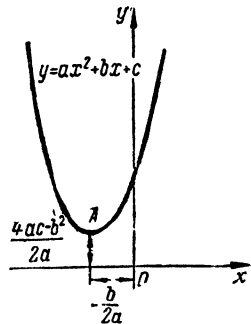
**922.**  $y' = 3 \sin^2 x \cos x$ . **923.**  $y' = 10x(x^2-1)^4$ . **924.**  $y' = -5 \cos^4 x \sin x$ .

**925.**  $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$ . **926.**  $y' = 5 \cos 5x$ . **927.**  $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ .

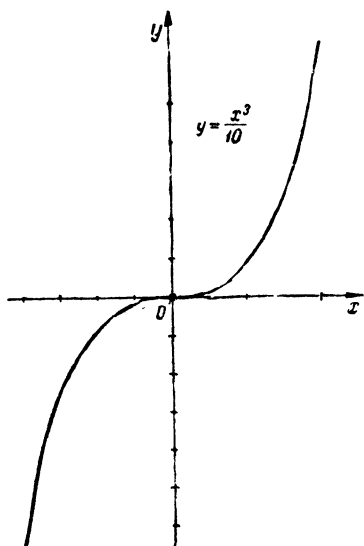
**928.**  $y' = -e^{-x}$ . **929.**  $y' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ . **930.**  $y' = \operatorname{ctg} x$ .

**931.**  $y' = -\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ . **932.**  $y' = \frac{2}{\sin 2x}$ . **933.**  $y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

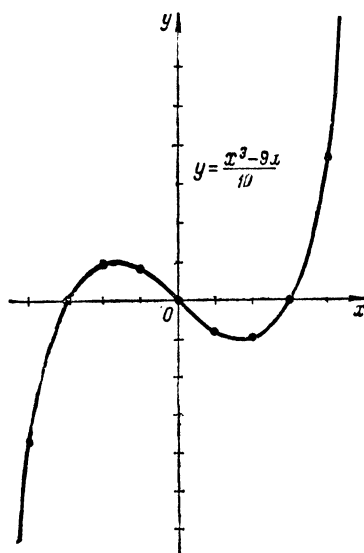
**934.**  $y' = -2xe^{-x^2}$ . **935.**  $y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$ . **936.**  $y' = \frac{3x+2}{x^2+x}$ .



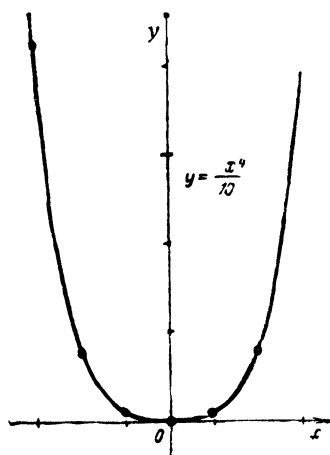
К задаче 822.



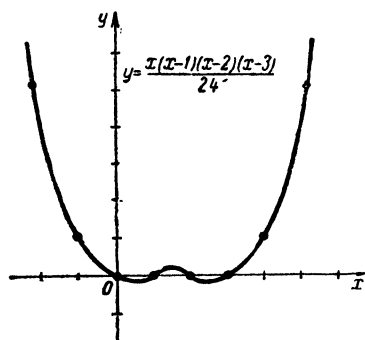
К задаче 823.



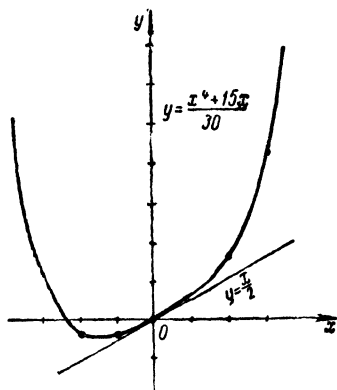
К задаче 824.



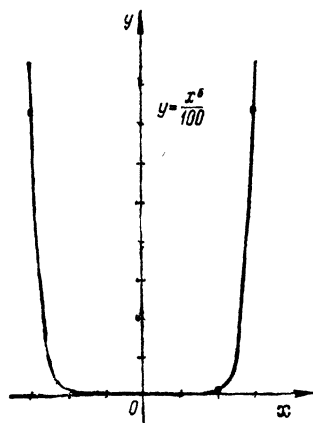
К задаче 825.



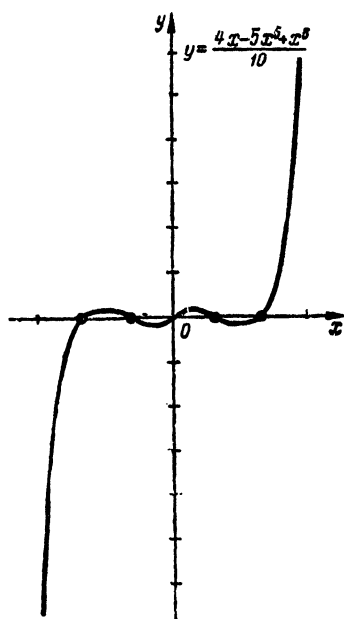
К задаче 826.



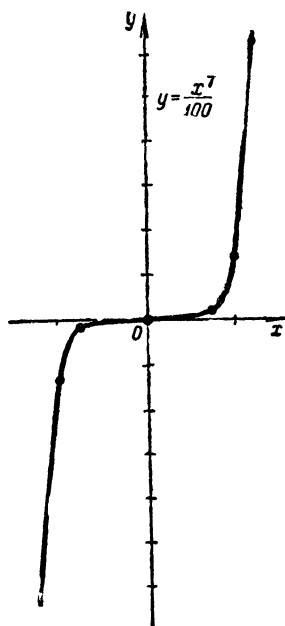
К задаче 827.



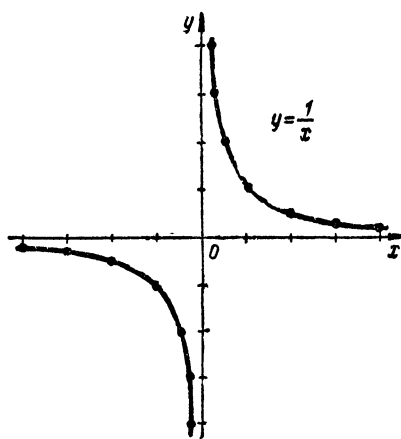
К задаче 829.



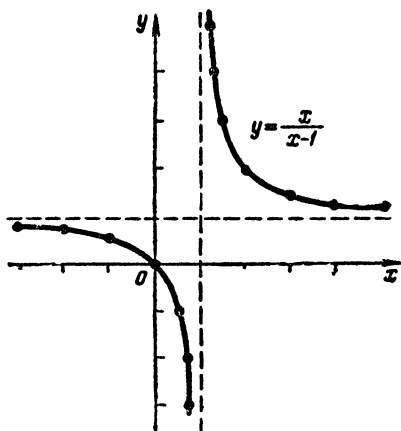
К задаче 828.



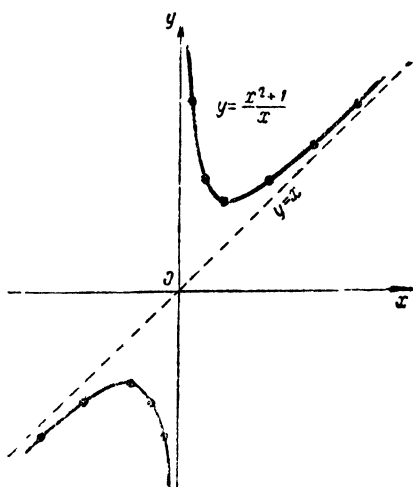
К задаче 830.



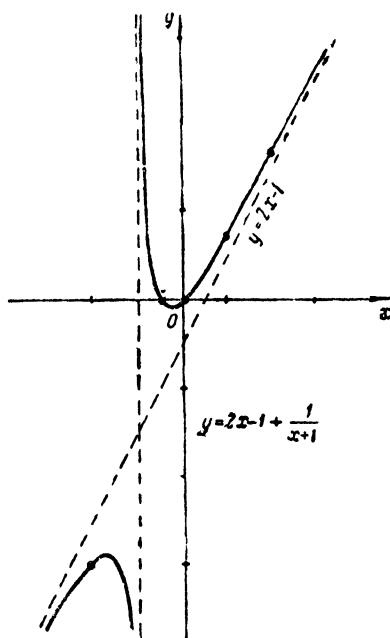
К задаче 831.



К задаче 832.

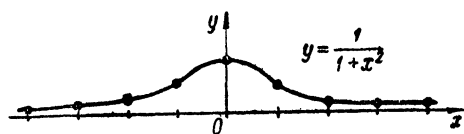


К задаче 833.

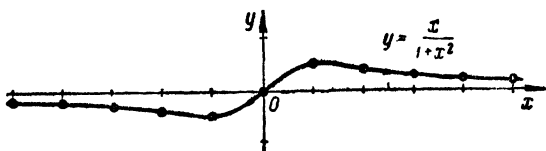


К задаче 834.

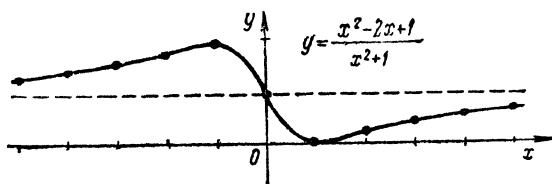




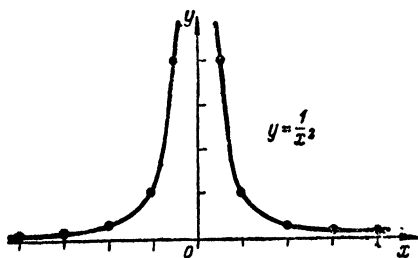
К задаче 835.



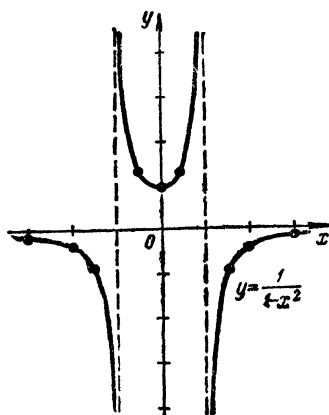
К задаче 836.



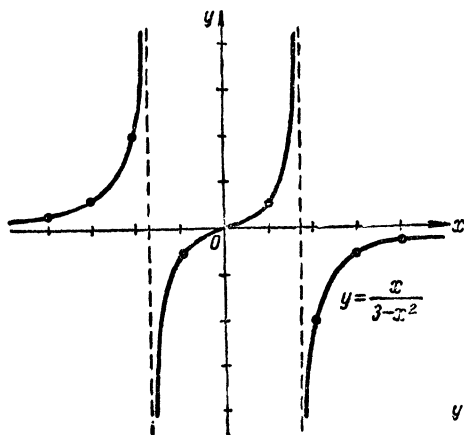
К задаче 837.



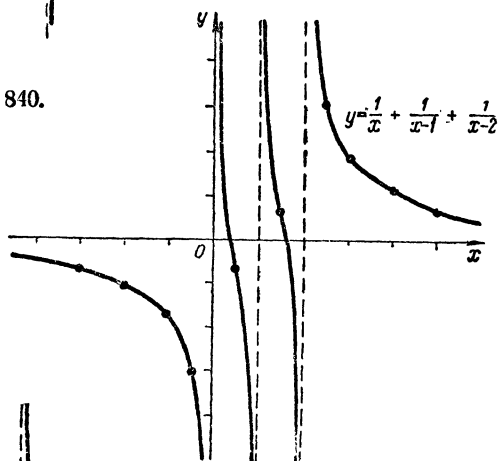
К задаче 838.



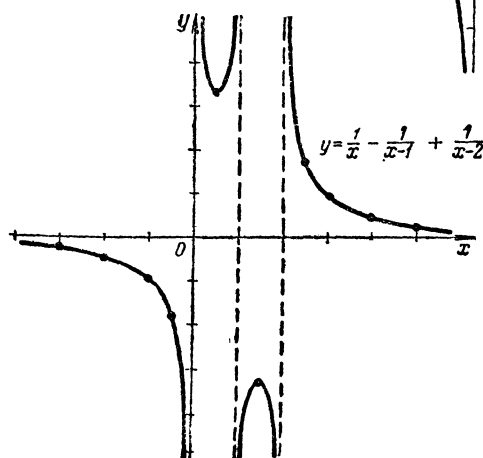
К задаче 839.



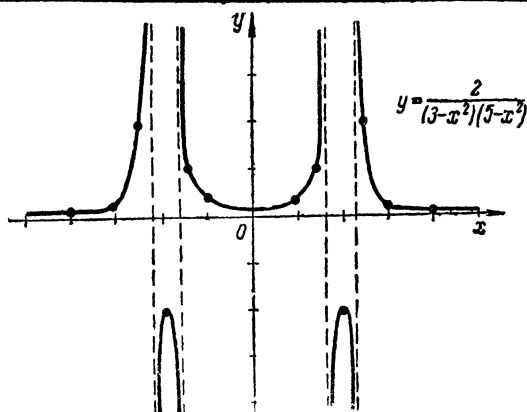
К задаче 840.



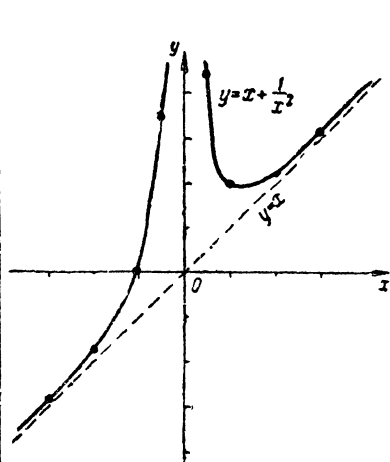
К задаче 841.



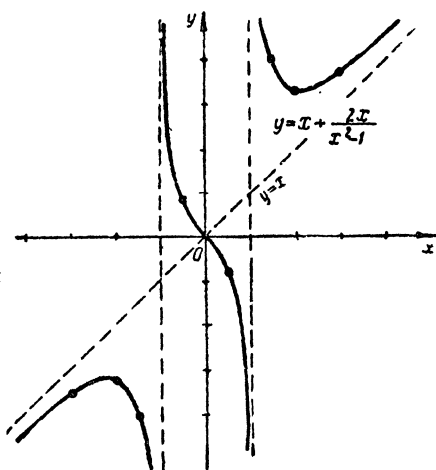
К задаче 842.



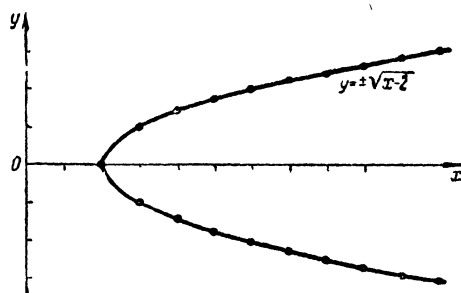
К задаче 843.



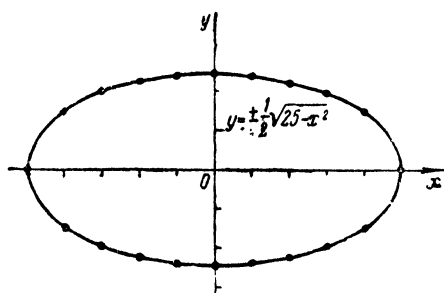
К задаче 844.



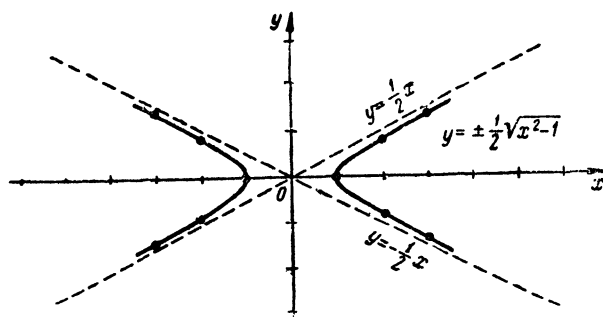
К задаче 845



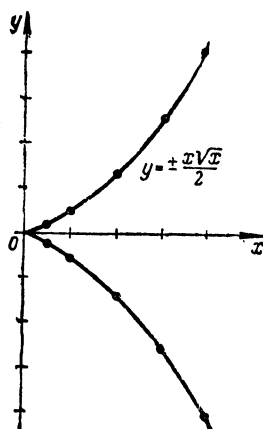
К задаче 846.



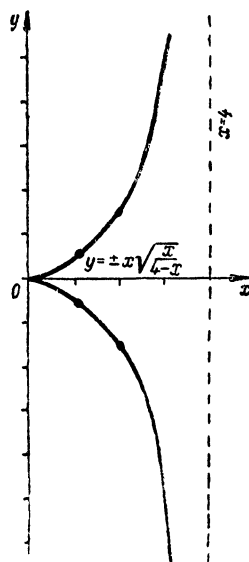
К задаче 847.



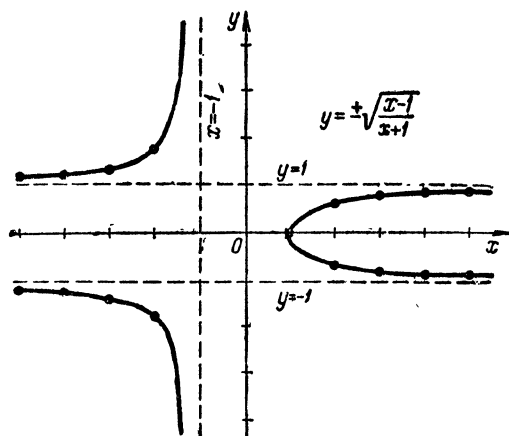
К задаче 848.



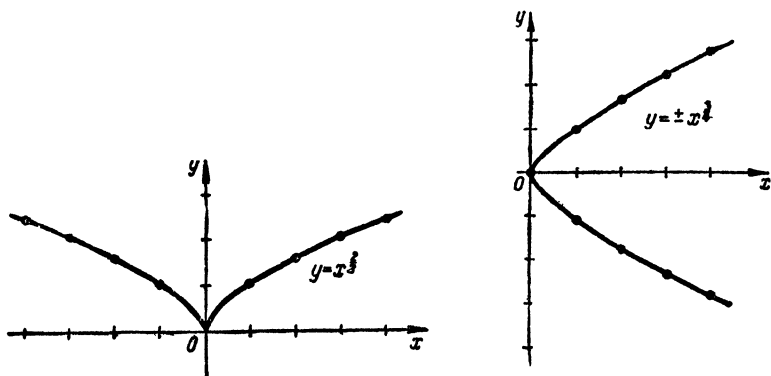
К задаче 849.



К задаче 850.

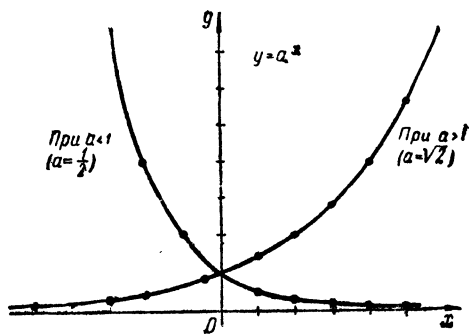


К задаче 851.

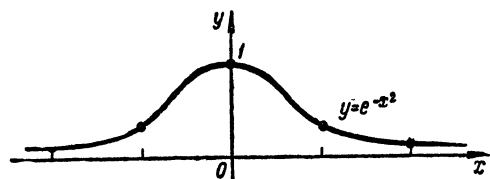


К задаче 852.

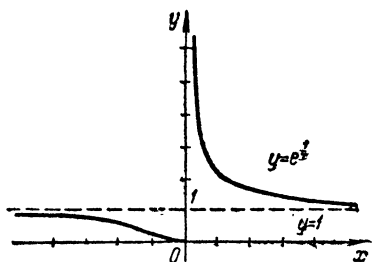
К задаче 853.



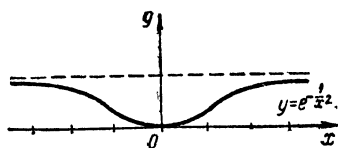
К задаче 854.



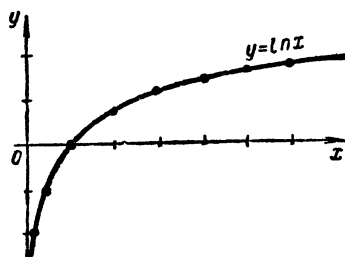
К задаче 855.



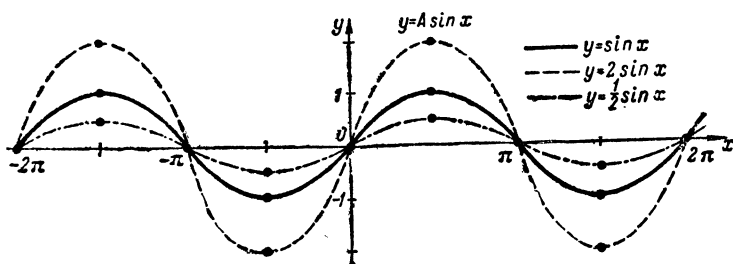
К задаче 856.



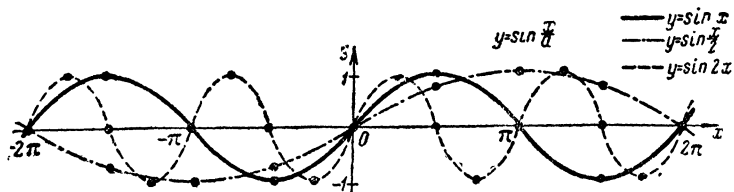
К задаче 857.



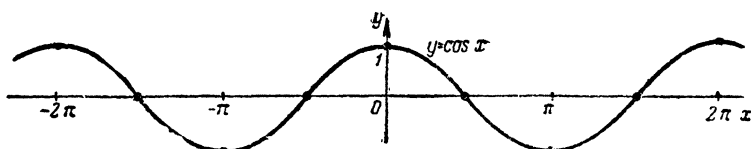
К задаче 858.



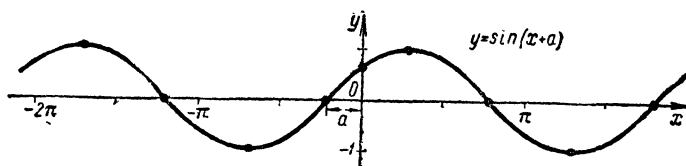
К задаче 659.



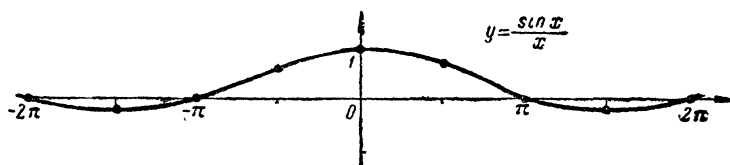
К задаче 860.



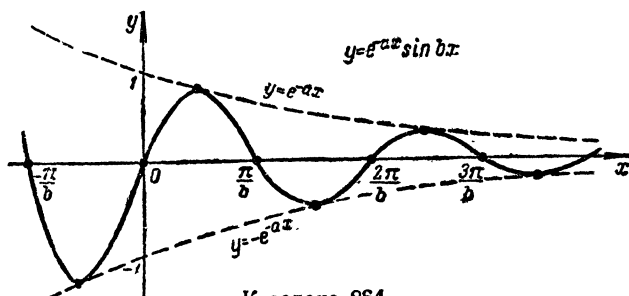
К задаче 861.



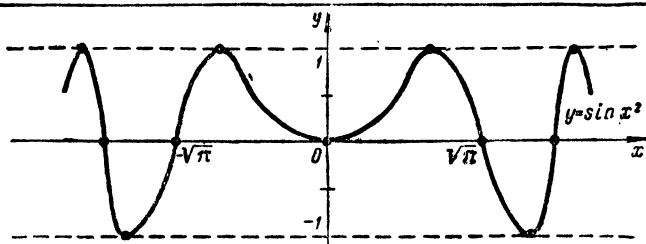
К задаче 862.



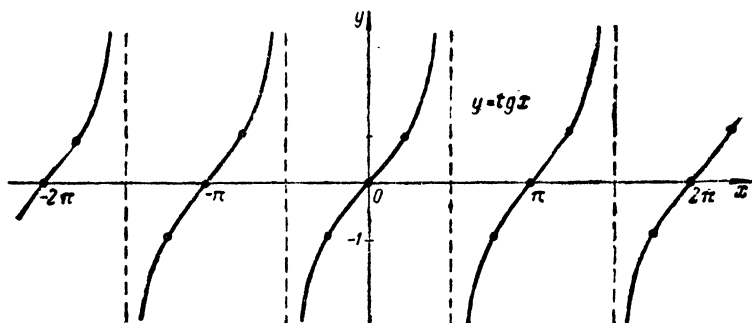
К задаче 863.



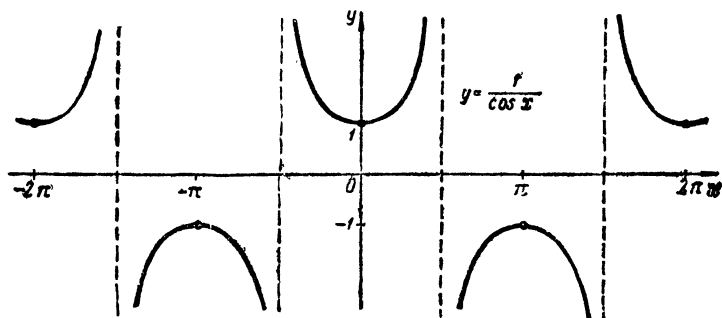
К задаче 864.



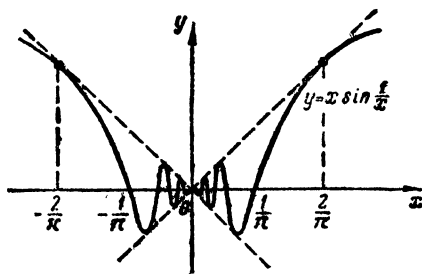
К задаче 865.



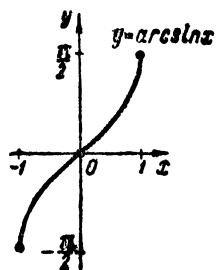
К задаче 866.



К задаче 867.

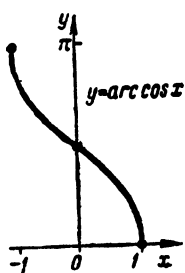


К задаче 868.

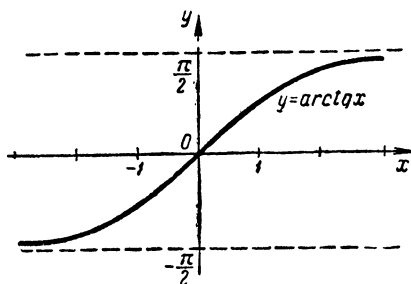


К задаче 869.

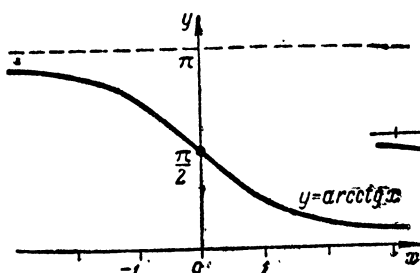




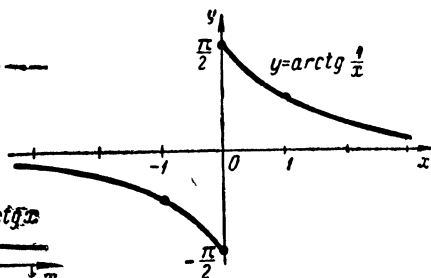
К задаче 870.



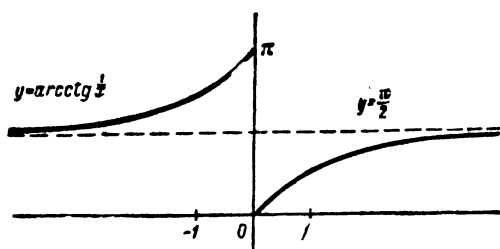
К задаче 871.



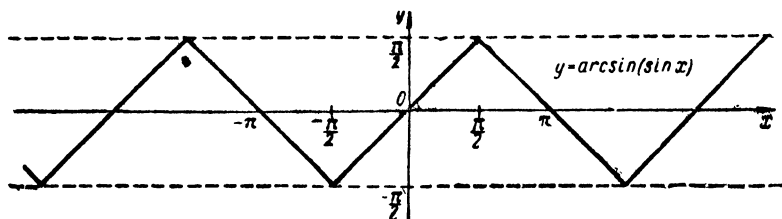
К задаче 872.



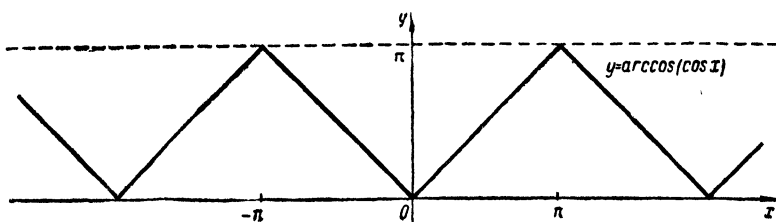
К задаче 873.



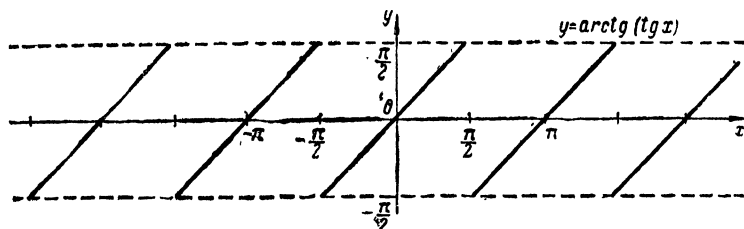
К задаче 874.



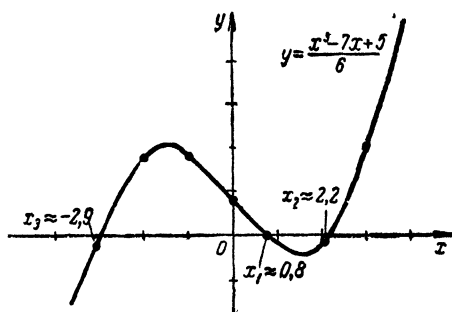
К задаче 875.



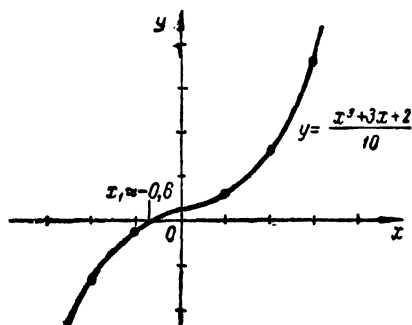
К задаче 876.



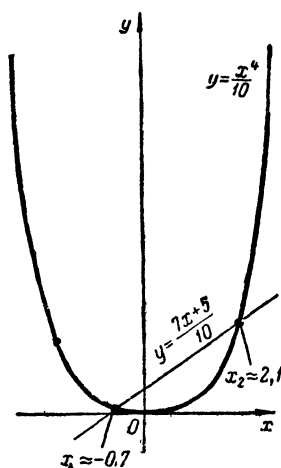
К задаче 877.



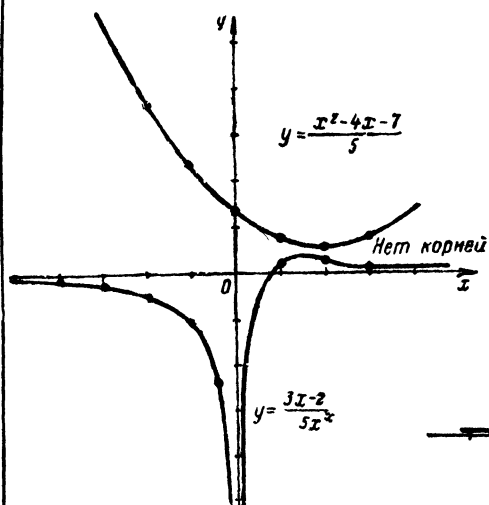
К задаче 888.



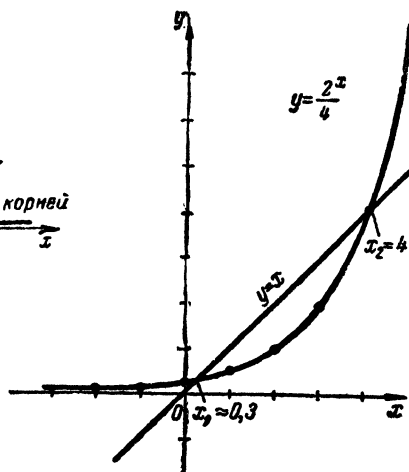
К задаче 889.



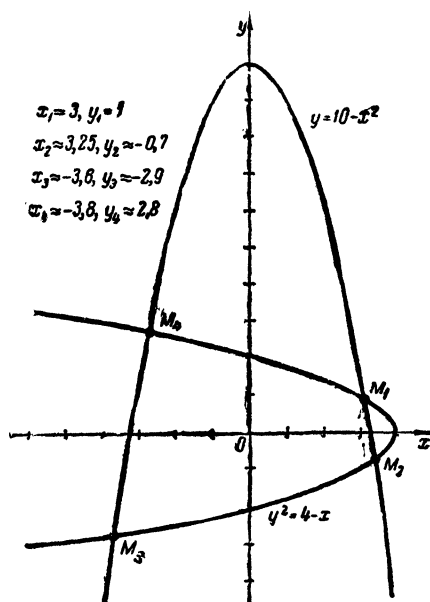
К задаче 890.



К задаче 891.



К задаче 892.



К задаче 893.



**937.**  $y' = \frac{4}{3\sqrt{2x+1}}$ . **938.**  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ . **939.**  $y' = b \cos ax \cos bx -$   
 $- a \sin ax \sin bx$ . **940.**  $y' = \frac{1}{x^2-1}$ . **941.**  $y' = e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx)$ .  
**942.**  $y' = \frac{-1}{\cos x}$ . **943.**  $y = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ . **944.**  $y' = \frac{1}{\cos x}$ .  
**945.**  $y' = x^3 \ln^2 x$ . **946.**  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ . **947.**  $y' = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ .  
**948.**  $y' = \frac{2x}{x^4-5x^2+6}$ . **949.**  $y' = +\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$ . **950.**  $y' = \frac{2x^3}{1-x^4}$ .  
**951.**  $y' = \frac{1}{\cos^8 x}$ . **952.**  $y' = \frac{1}{\sin^8 x}$ . **953.**  $y' = \operatorname{tg}^3 x$ . **954.**  $y' = \frac{1}{\cos^3 x}$ .  
**955.**  $y' = \frac{1}{a^2+x^2}$ . **956.**  $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ . **957.**  $y' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ .  
**958.**  $y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . **959.**  $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sign} \cos x$ ;  $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ .  
**960.**  $y' = \frac{\sigma}{x\sqrt{x^2-1}}$ ;  $\sigma = \operatorname{sign} x, x \neq 0$ . **961.**  $y' = -\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$   
 $= -\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}}$ . **962.**  $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ . **963.**  $y' = \frac{1}{x^2+x+1}$ . **964.**  $y' =$   
 $= -\frac{3\gamma}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $\sigma = \operatorname{sign} (1-4x^2)$ ;  $1-4x^2 \neq 0$ . **965.**  $y' = \frac{2\sigma}{1+x^2}$ ;  $\sigma =$   
 $= \operatorname{sign} (1-x^2)$ ;  $x^2 \neq 1$ . **966.**  $y' = \frac{-2\sigma}{1+x^2}$ ;  $\sigma = \operatorname{sign} x$ ;  $x \neq 0$ . **967.**  $y' =$   
 $= \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$ . **968.**  $y' = \frac{\sigma}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$ ;  $\sigma = \operatorname{sign} a$ ;  $a \neq 0$ . **969.**  $y' =$   
 $= \frac{1+x^4}{1+x^8}$ . **970.**  $y' = \frac{1}{1+x^4}$ . **971.**  $y' = \frac{1}{a+b \cos x}$ . **972.**  $y' = x^x (\ln x + 1)$ .  
**973.**  $y' = x^{\sin x} \left( \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$ . **974.**  $y' = \operatorname{sign} x$ ;  $x \neq 0$ . **975.**  $y' =$   
 $= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , если  $x \neq 0$ ;  $y' = 0$  при  $x = 0$ . **976.**  $1 + 2x + 3x^2 +$   
 $+ \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ . **977.**  $\sin x + 2 \sin 2x + \dots +$   
 $+ n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)x}{2(1-\cos x)}$ . **978.**  $\sin x + 3 \sin 3x + \dots +$   
 $+ (2n-1) \sin (2n-1)x = \frac{(2n-1) \sin (2n+1)x - (2n+1) \sin (2n-1)x}{4 \sin^2 x}$ .  
**980.**  $\operatorname{tg} \alpha = 1, 0$  и  $-1$ , соответственно;  $\alpha = 45^\circ, 0$  и  $-45^\circ$ . **981.**  $135^\circ$ .  
**982.**  $45^\circ$ . **983.**  $45^\circ$  при  $x = 2n\pi$  и  $135^\circ$  при  $x = (2n+1)\pi$ . **984.**  $A = a$ .  
**985.**  $a = e$ . **986.**  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , считая углы от касательной, идущей вверх,  
до положительного направления оси  $Oy$ . **987.** При  $a = 4$ , в начале координат.  
**988.**  $b^2 - 4ac = 0$ . **989.**  $4p^3 +$   
 $+ 27q^3 = 0$ . **1000.**  $a = e^{\frac{1}{e}}$ ;  $x = e$ . **1002.**  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} l$ . **1003.**  $45^\circ$ .  
**1004.**  $\alpha = 90^\circ - \frac{t}{2}$ . **1006.**  $y = 2x - 3$ . **1007.**  $(4, 3)$  и  $(3, 7)$ . **1008.**  $\operatorname{tg} \alpha =$   
 $= 17 \pm 12\sqrt{2}$ . **1013.** При  $x > 0$  выпуклость вниз, при  $x < 0$  — выпуклость  
вверх. **1014.**  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . **1015.**  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ . **1016.**  $120$ . **1017.**  $0$ .

$$1018. 12960. 1019. \frac{42}{125} x^{-\frac{12}{5}}. 1020. x^2(60 \ln x + 47). 1021. 27a^{3x} \ln^3 x.$$

$$1022. am(m+1, (n+2)(m+3)x^{-m-4}. 1023. -\frac{6}{(x-1)^4}. 1024. 16e^{2x}(x^2 + 4x + 3). 1025. 27(3x^2 \cos 3x + 8x \sin 3x - 4 \cos 3x). 1026. 249e^{2x}(2x^2 + 100x + 1225). 1027. x^2 \sin x - 80x \cos x - 780 \sin x. 1028. -4e^x \sin x. 1032. 2n!(1-x)^{-n-1}(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n). 1033. (-b)^{n-1} a \cdot n!(a+bx)^{-n-1}. 1034. (-1)^{n-1} n!(\alpha\delta - \beta\gamma)\gamma^{n-1}(\gamma x + \delta)^{-n-1}. 1035. (-1)^n n! [x^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}].$$

$$1036. (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^{2n-1}} x^{\frac{1}{2}-n}. 1037. 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n+3}{2}\pi\right).$$

$$1038. m^{n-3} e^{mx} [m^3 x^3 + 3nm^2 x^2 + 3n(n-1)mx + n(n-1)(n-2)].$$

$$1039. x^2 a^n \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right) + 2nxa^{n-1} \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + n(n-1)a^{n-2} \times \\ \times \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2} - \pi\right). 1040. (-1)^n 6(n-4)! x^{3-n}; n \geq 4. 1041. (-1)^{n-1} a^n \times \\ \times (n-1)!(ax+b)^{-n}. 1042. (n-1)! [(1-x)^{-n} + (-1)^{n-1}(1+x)^{-n}]. 1043. a^n \sin x \times \\ \times \left(ax + \frac{\pi n}{2}\right). 1044. (-1)^n (1+x)^{-n-1} \left[\ln(1+x) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right].$$

$$1069. \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x. 1070. \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6xy^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2y + 9y^2.$$

$$1071. \frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \frac{\partial u}{\partial z} = x + y. 1072. \frac{\partial u}{\partial x} = yxy^{-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = x^y \ln x. 1073. \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1, \frac{\partial u}{\partial y} = z^2 + 3x, \frac{\partial u}{\partial z} = 2yz + 1.$$

$$1074. \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}. 1075. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

$$1076. \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{3}{x^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{5}{y^2}. 1077. \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + z, \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = x + 2y + z, \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + 2z. 1078. \frac{\partial u}{\partial x} = zx^z - 1yz, \frac{\partial u}{\partial y} = zx^z y^{z-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy). 1079. \frac{\partial u}{\partial x} = yzx^y \ln z, \frac{\partial u}{\partial y} = xz^x y \ln z, \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^x y^{-1}.$$

$$1080. du = \cos(x^2 + y^2)(2x dx + 2y dy). 1081. du = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}. 1082. du = \\ = \frac{2}{\sin \frac{2x}{y}} \frac{y dx - x dy}{y^2}. 1083. du = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. 1084. du =$$

$$= \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}. 1085. du = yx^{y-1} dx + xy \ln x dy. 1092. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. 1093. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}. 1094. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (2-y) \cos(x+y) - x \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$$

$$= (1-y) \cos(x+y) - (1+x) \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(2+x) \sin(x+y) -$$

$$-y \cos(x+y). 1095. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1+y \ln x). 1096. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2}{(x+y)^3}.$$

$$1097. \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 \frac{x^4 + y^4 - 6x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^4}. 1098. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3}; r^2 = x^2 + y^2 + z^2. 1099. (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}. 1100. d^4 u =$$

$$= 2dx^2 - 2dxdy + 4dy^2. \text{ 1101. } d^2u = 2(ydx + xdy)^2 + 4xydxdy. \text{ 1102. } d^2u = e^{xy}(ydx + xdy)^2 + 2e^{xy}dxdy. \text{ 1103. } d^2u = (x^2 + y^2)^{-2}[(ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2]. \text{ 1104. } -\sin(x + y + z) \cdot (dx + dy + dz)^2. \text{ 1105. } 24(dx^4 + 4dx^3dy + 2dxdy^2dz - 3dxdydz^2 + dz^4). \text{ 1106. } 24(dx^4 - 3dx^2dy^2 + dy^4). \text{ 1107. } 24(dx^4 + 3dx^3dy + dz^4). \text{ 1108. } 6dxdydz. \text{ 1109. } -\frac{6(2dx + 3dy - dz)^4}{(2x + 3y - z)^4}.$$

$$\text{1110. } d^3u = -\cos(2x + y) \cdot (2dx + dy)^3, \quad \frac{\partial^3u}{\partial x^3} = -8\cos(2x + y), \quad \frac{\partial^3u}{\partial x \partial y^2} = -2\cos(2x + y). \text{ 1111. } d^4u = \cos(x + y) \cdot (dx + dy)^4; \quad \frac{\partial^4u}{\partial x^2 \partial y^2} = \cos(x + y).$$

$$\text{1112. } d^4u = -\frac{6(ax + by + cz)^4}{(ax + by + cz)^4}; \quad \frac{\partial^4u}{\partial x^4} = -6a^4, \quad \frac{\partial^4u}{\partial x^2 \partial y^2} = -6a^2b^2. \text{ 1113. } d^3u = e^v dv^3; \quad \frac{\partial^3u}{\partial x^3} = e^v, \quad \frac{\partial^3u}{\partial x \partial y \partial z} = 6e^v; \quad v = x +$$

$$+ 2y + 3z. \text{ 1114. } du = \varphi'(t)(xdy + ydx); \quad d^2u = \varphi''(t)(xdy + ydx)^2 + \varphi'(t) \cdot 2dxdy. \text{ 1115. } du = \varphi'(t)(2xdx + 2ydy); \quad d^2u = \varphi''(t)(2xdx + 2ydy)^2 + \varphi'(t)(2dx^2 + 2dy^2). \text{ 1116. } du = \varphi'(t)(2xdx + 2ydy + 2zdz); \quad d^2u = \varphi''(t)(2xdx + 2ydy + 2zdz)^2 + \varphi'(t)(2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2). \text{ 1117. } du =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta; \quad d^2u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d\eta^2; \quad d\xi = a dx + b dy + c dz, \quad d\eta = a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz. \text{ 1118. } du = a \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} dx + b \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} dy +$$

$$+ c \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} dz; \quad d^2u = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} dx^2 + b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} dy^2 + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} dz^2 + 2ab \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} dxdy + 2ac \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \zeta} dxdz + 2bc \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \zeta} dydz. \text{ 1119. } du = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} (dx + dy) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} (dx - dy),$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} (dx + dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} (dx + dy)(dx - dy) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} (dx - dy)^2. \text{ Производные}$$

получаются из сравнения этих равенств с формулами:  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx +$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2. \quad \text{Например: } \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \text{ 1120. } du =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta; \quad d^2u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d\eta^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d^2\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d^2\eta,$$

где  $d\xi = 2xdx + 2ydy$ ,  $d\eta = xdy + ydx$ ,  $d^2\xi = 2dx^2 + 2dy^2$ ,  $d^2\eta = 2dxdy$ .

Поэтому, например,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ .

$$\text{1121. } \frac{\partial^n u}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu} = a^\lambda b^\mu c^\nu \varphi^{(n)}(t); \quad \lambda + \mu + \nu = n. \text{ 1122. } a^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial \xi^n}. \text{ 1123. } \rho.$$

$$\text{1124. } \rho^2 \sin \varphi. \text{ 1125. } \frac{r}{a\rho \sin \varphi}. \text{ 1126. } \xi \eta^2. \text{ 1149. } y' = -1. \text{ 1150. } x = a \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{1151. } y' = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}. \text{ 1152. } y' = \frac{-\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}. \text{ 1153. } y' =$$

$$= \frac{1}{1 - a \cos y}; \quad y'' = \frac{-a \sin y \cdot y'}{(1 - a \cos y)^2}. \text{ 1154. } y''' = \frac{1}{3}. \text{ 1157. } (y - b)y^{IV} +$$

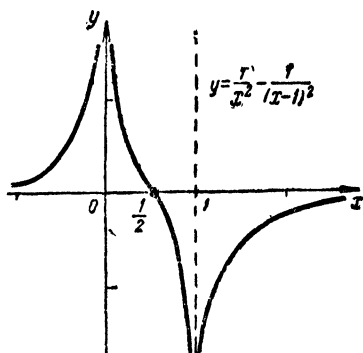
$$+ 4y'y''' + 3y'^2 = 0. \text{ 1158. } y = \pm 1. \text{ 1159. } \pm \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}; \quad |b| \geq a > 0.$$

- 1160.**  $y' = 0$  и  $y' = \infty$ . **1161.**  $y' = 1$ ,  $z'' = -\frac{2}{3}$ . **1162.**  $d^2y = -\frac{20y^2 + 16x^2}{25y^3} dx^2$ ,  $d^2z = \frac{5z^2 - x^2}{25z^3} dx^2$ . **1163.**  $x' = 5$ ,  $y'' = 12$ . **1164.**  $y' = \frac{z-x}{y-z}$ ,  $z' = \frac{x-z}{y-z}$ . **1165.**  $y' = -1$ ,  $z' = 0$ ,  $5y'' = -4$ ,  $5z'' = 4$ .  
**1166.**  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + (z-1)^2}{(z-1)^3}$ . **1167.**  $(z^2-1)^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2zx^2y^2$ . **1168.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{1+z}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x-z)}{(1+z)^3}$ . **1169.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$ . **1170.**  $(x+y) dz = -(y+z) dx - (x+z) dy$ ,  $(x+y)^2 d^2z = 2(y+z) dx^2 + 4z dx dy + 2(z+x) dy^2$ . **1171.**  $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n n! \frac{y+z}{(x+y)^n}$ .  
**1172.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{55}{32}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{25}{32}$ . **1173.**  $\frac{dx}{dz} = \frac{\varphi'(t)}{2kt}$ ,  $\frac{dy}{dz} = \frac{\psi'(t)}{2kt}$ .  
**1174.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a} \sin v \operatorname{ctg} u$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b} \cos v \operatorname{ctg} u$ . **1181.**  $\frac{d^2x}{dy^2} + x = ev$ .  
**1182.**  $\frac{d^3x}{dy^3} = 0$ . **1183.**  $x^{IV} = 0$ . **1184.**  $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$ . **1185.**  $y_t'' + 2y_t' + y = 0$ . **1186.**  $y_t''' - y_t'' - y_t' + y = 0$ . **1187.**  $y''' + by = 0$ . **1188.**  $y'' + y = 0$ .  
**1191.**  $\frac{r'}{r}$ . **1192.**  $\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$ . **1193.**  $\eta'' + (b-1)\eta = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \xi}$ . **1184.**  $v'' + v = 0$ .  
**1199.**  $u'' - u' = \frac{A}{(\beta - \alpha)^2} u$ . **1200.**  $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ . **1201.**  $u \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$ .  
**1202.**  $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ . **1203.**  $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ . **1204.**  $w = r \frac{\partial u}{\partial r} \cos 2\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin 2\varphi$ .  
**1205.**  $w = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$ . **1206.**  $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ .  
**1207.**  $w = \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$ . **1208.**  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ . **1209.**  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2(u^2 + v^2)z = 0$ .  
**1210.**  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v-v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0$ . **1211.**  $\alpha = \frac{1}{a}$ ,  $\beta = \frac{1}{b}$  или  $\alpha = \frac{1}{b}$ ,  $\beta = \frac{1}{a}$ ;  $a \neq b$ . **1212.**  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$ . **1213.**  $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ . **1214.**  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$ .  
**1215.**  $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u = 0$ . **1216.**  $r^3u^{IV} + 2r^2u''' - ru'' + u' = 0$ . **1217.**  $u\varphi'' + \varphi' + c\varphi = 0$ . **1218.**  $u'' + \frac{2}{r}u' + u = 0$ . **1219.**  $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2$ ,  $\Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ .  
**1224.**  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$ . Эти корни существуют по теореме Ролля, а большего числа корней производная иметь не может, как полином четвёртой степени. **1230.** При  $-1 < x < 1$ . **1231.** При  $x > \frac{3}{4}$ .  
**1260.**  $y_{\max} = 9$ . **1261.**  $y_{\min} = -16$ . **1262.**  $y_{\max} = 16$  при  $x = -2$ ,  $y_{\min} = -16$  при  $x = 2$ . **1265.** Нет экстремальных значений. **1266.**  $y_{\max} = 4$  при  $x = 1$ ;  $y_{\min} = -28$  при  $x = 5$ . **1267.**  $y_{\min} = a$  при  $x = b$ . **1268.** Нет экстремальных значений. **1269.**  $y_{\max}$  при  $x = 2$ ;  $y_{\min}$  при  $x = 1$  и  $x = 3$ . **1270.**  $y_{\max}$  при  $x = 1$ ;  $y_{\min}$  при  $x = 3$ . **1271.**  $y_{\min}$  при  $x = 4$ ;

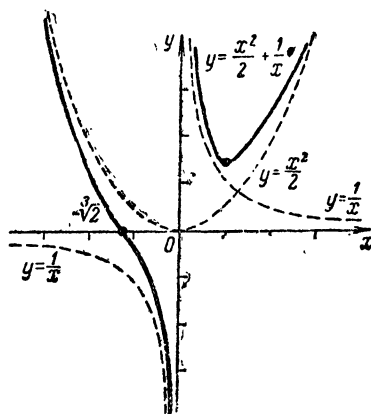


$y_{\max}$  при  $x=0$ . **1272.**  $y_{\min}$  при  $x=-1$ ;  $y_{\max}$  при  $x=1$ . **1273.**  $y_{\min}$  при  $x=1$ ;  $y_{\max}$  при  $x=-1$ . **1274.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{a^2}{a-b}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=\frac{a^2}{a+b}$ . **1275.**  $y_{\max}$  при  $x=4$ ;  $y_{\min}$  при  $x=16$ . **1276.**  $y_{\min}$  при  $x=\pm 1$ . **1277.**  $y_{\max}$  при  $x=\pm \sqrt{2}$ . **1278.**  $y_{\min}$  при  $x=\frac{1}{e}$ .  
**1279.**  $y_{\min}$  при  $x=e^{-\frac{1}{2}}$ . **1280.**  $y_{\min}$  при  $x=\frac{1}{e}$ . **1281.**  $y_{\max}$  при  $x=e^{-\frac{1}{2}}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=1$ . **1282.**  $y_{\max}$  при  $x=n$ . Если  $n$  чётное, то  $y_{\min}$  при  $x=0$ . **1283.**  $y_{\max}$  при  $x=\pm 1$ ,  $y_{\min}$  при  $x=0$ . **1284.**  $y_{\min}$  при  $x=0$ . **1285.**  $y_{\max}$  при  $x=\ln 2$ . **1286.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{9}{11}$  и  $x=2$ ;  $y_{\min}$  при  $x=-2$  и  $x=1$ . **1287.** Функция постоянно возрастает.  
**1288.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{\pi}{4}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=\frac{5\pi}{4}$ . **1289.** 1)  $2e^2 < 1$ :  $y_{\max}$  при  $x=\frac{\pi}{2}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=\frac{3\pi}{2}$ . 2)  $2e^2 > 1$ :  $y_{\min}$  при  $x=\frac{\pi}{2}$  и  $x=2\pi-\alpha$ ;  $y_{\max}$  при  $x=\frac{3\pi}{2}$  и  $x=\alpha$ . Здесь  $e \sin \alpha = \sqrt{1-e^2}$ ;  $e > 0$ . **1290.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ . **1291.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{7\pi}{8}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=0$ ,  $\frac{3\pi}{8}$ ,  $\frac{5\pi}{8}$ .  
**1292.**  $y_{\min}$  при  $x=\frac{\pi}{2}$ ,  $y_{\max}$  при  $x=\frac{3\pi}{2}$ . **1293.**  $y_{\max}$  при  $x=\frac{(4m+1)\pi}{2}$ ;  $y_{\min}$  при  $x=\frac{(4m+3)\pi}{2}$ . **1294.**  $y_{\max}$  при  $x=-\frac{1}{2}$ .  
**1295.**  $y_{\max}=2$  при  $2x=1$ . **1296.** Если  $a > 0$ , то при  $x=a$  минимум  $y$ ; если  $a < 0$ , то при  $x=a$  максимум. **1297.**  $y_{\max}=1$  при  $x=1$ .  
**1298.**  $y_{\max}=0$  при  $x=1$ ;  $y_{\min}=-\frac{1}{2}$  при  $x=\frac{1}{2}$ . **1299.** Экстремальных значений нет;  $y$  убывает. **1300.**  $y_{\max}=a\sqrt[3]{4}$  при  $x=a\sqrt[3]{2}$ .  
**1301.**  $y_{\max}=\sqrt[8]{27}$  при  $x=\sqrt[8]{3}$ ;  $y_{\min}=-\sqrt[8]{27}$  при  $x=-\sqrt[8]{3}$ .  
**1302.** Для  $y > 0$  при  $x=0$  минимум  $y$ , при  $x=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  максимум  $y$ .  
**1303.** При  $x=a$  минимум, при  $x=-a$  максимум,  $x=0$  — точка перегиба. Асимптот нет. **1304.** Асимптота  $y=a$ . Минимум  $y$  при  $x=0$ . Точки перегиба при  $x=\pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ . **1305.** Максимум  $y$  при  $x=-1$ , минимум при  $x=1$ . Точка перегиба при  $x=0$ . Асимптот нет. **1306.** Асимптоты  $x=-1$ ,  $y=0$ .  $y$  — убывающая функция. Есть точка перегиба при  $x=2,49$ . **1307.** Асимптота  $y=0$ . Точки перегиба  $x=\pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Максимум  $y=a$  при  $x=0$ . **1308.** Асимптота  $y=0$ . Точки перегиба при  $x=\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ , максимум  $y=A$  при  $x=0$ . **1309.** Если  $n$  чётное, то  $y_{\min}$  при  $x=0$ ;  $y_{\max}$  при  $x=na$ . Если  $n$  нечётное, то только  $y_{\max}$  при  $x=na$ . Точки перегиба  $x=n \pm \sqrt{n}$ , а при нечётном  $n$  и  $x=0$ . Асимптота  $y=0$ . **1310.** Асимптота  $y=0$ . Минимум  $y$  при  $x=0$ , максимум при  $x=\pm a$ .

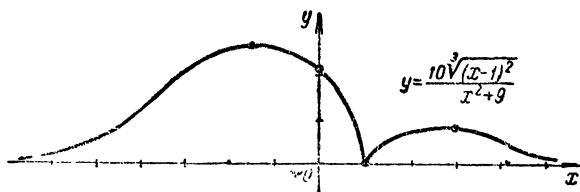
Точки перегиба при  $x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$ . **1311.** Асимптоты  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ . При  $x = \frac{1}{2}$  точки перегиба. См. чертёж на стр. 195. **1312.** Криволинейные асимптоты  $y = \frac{x^2}{2}$  и  $y = \frac{1}{x}$ . Точка перегиба  $x = -\sqrt[3]{2}$ . Минимум  $y = \frac{3}{2}$  при  $x = 1$ . См. чертёж на стр. 195. **1313.** Асимптоты  $x = \pm 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y$  — убывающая функция. **1314.** Асимптоты  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Точка перегиба при  $x = -2$ . При  $x = -1$  максимум. **1315.** Асимптоты  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 1$ . Точка перегиба при  $x = \frac{1}{2} (1 - \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25})$ . Максимум  $y$  при  $x = \frac{1}{2} (1 + \sqrt[3]{5})$ , минимум при  $x = \frac{1}{2} (1 - \sqrt[3]{5})$ . **1316.** Асимптоты  $x = -1$ ,  $y = \pm 1$ . Область существования  $y$ :  $|x| > 1$ . **1317.** Асимптота  $y = 0$ . При  $x = 1$  точка возврата (остриё), а  $y$  минимум. Максимум  $y$  при  $x = -\frac{3}{2}$  и  $x = 3$ . См. чертёж на стр. 195. **1318.**  $y$  минимум при  $x = 0$ . Асимптоты  $y = \pm x$ . Выпуклость вниз. См. чертёж на стр. 195. **1319.** Асимптоты  $y = \text{sign } x$ ,  $y$  постоянно возрастает. Точка перегиба  $x = 0$ . См. чертёж на стр. 195. **1320.** Максимум  $|y|$  при  $5x = -4$ ,  $y$  существует при  $x > -1$ . Точки перегиба при  $15x = \sqrt{24} - 12$ . См. чертёж на стр. 196. **1321.** Максимум  $y$  при  $x = -\frac{2}{11}$ ; точки перегиба при  $x = -1$  и при  $44x = -16 \pm \sqrt{108}$ . См. чертёж на стр. 196. **1322.** Максимум при  $x = 0$ . Точки возврата  $x = \pm 1$ . Выпуклость вверх. См. чертёж на стр. 196. **1323.** Асимптота  $y = 0$ ; точка перегиба  $x = 0$ , точки возврата  $x = \pm 1$ . См. чертёж на стр. 196. **1324.** Выпуклость вниз. При  $x = \pm 1$  точки прекращения. Асимптота  $y = 0$ . См. чертёж на стр. 196. **1325.** Асимптота  $x = -1$ . Начало координат — двойная точка. См. чертёж на стр. 196. **1326.**  $0 < x < 1$ . Асимптота  $x = 0$ . Точки перегиба  $x = \frac{3}{4}$ . См. чертёж на стр. 196. **1327.** Начало координат — двойная точка. Асимптоты  $x = \pm 1$ . См. чертёж на стр. 196. **1328.** Экстремальные  $y$  при  $2x = -3 \pm \sqrt{17}$ . Асимптота  $x = -1$ . Начало — двойная точка. См. чертёж на стр. 197. **1329.** Начало — точка возврата. Экстремальные  $y$  при  $4x = 3a$ . Точки перегиба при  $4x = 3 - \sqrt{3}$ . См. чертёж на стр. 197. **1330.** Точки перегиба  $x = \frac{p^2}{q}$ . См. чертёж на стр. 197. **1331.** См. чертёж на стр. 197. **1332.** См. чертёж на стр. 197. **1333.** Максимум  $y$  при  $x = 0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{2}$  минимум при  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ; точки перегиба при  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ . См. чертёж на стр. 198. **1334.** Максимум  $y$  при  $x = 0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ; минимум при  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ . Точки перегиба при  $x = \frac{(2n+1)\pi}{8}$ , т. е. при  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{3\pi}{8}$ ,  $\frac{5\pi}{8}$ ,  $\frac{7\pi}{8}$ ,  $\frac{9\pi}{8}$ ,  $\frac{11\pi}{8}$ ,  $\frac{13\pi}{8}$ ,  $\frac{15\pi}{8}$ . **1335.** Максимум  $y$  при  $x = 0$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ; минимум при  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ . См. чертёж на стр. 198. **1336.** Максимум  $y$  при  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ , минимум при  $x = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ . См. чертёж на стр. 198. **1337.** Асимптоты  $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ . Максимум  $y$  при  $x = 0, 2\pi, \dots$  минимум  $y$  при  $x = \pi, 3\pi, \dots$ . См. чертёж на стр. 198. **1338.** Асимптоты  $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ . Максимум  $y = \frac{1}{3}$  при  $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ . Максимум  $y$ , равный 3, при  $x = n\pi$ . См. чертёж на стр. 199. **1339.** Асимптота  $y = 0$ . Экстремальные значения



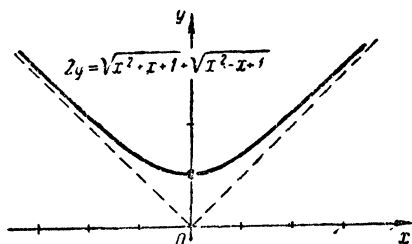
К задаче 1311.



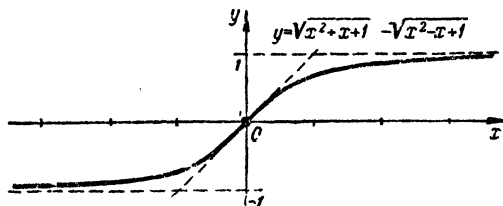
К задаче 1312.



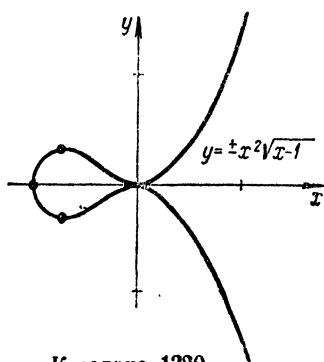
К задаче 1317.



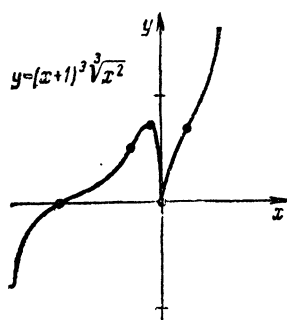
К задаче 1318.



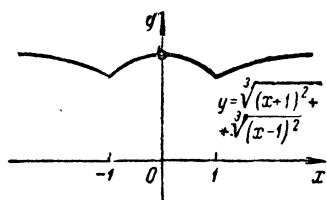
К задаче 1319.



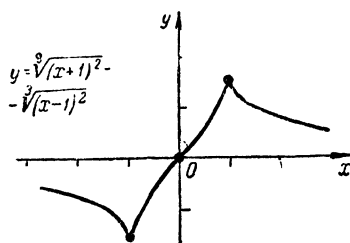
К задаче 1320.



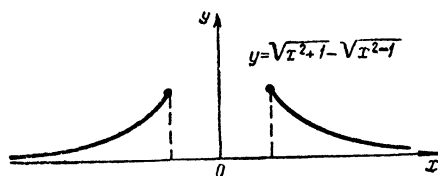
К задаче 1321.



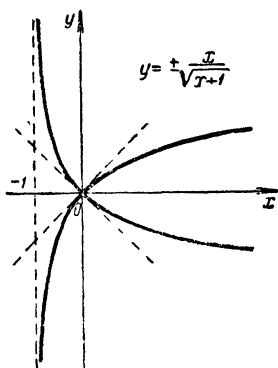
К задаче 1322.



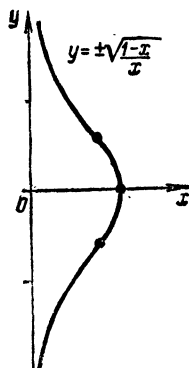
К задаче 1323.



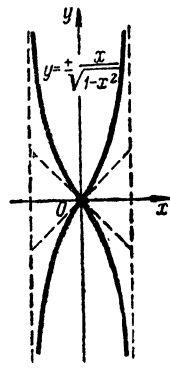
К задаче 1324.



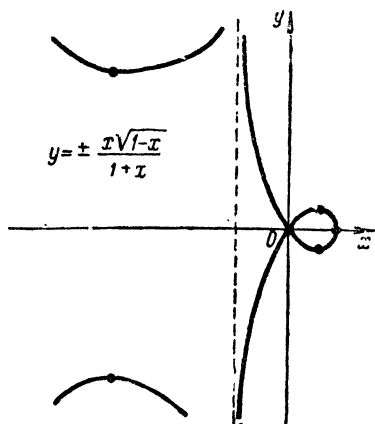
К задаче 1325.



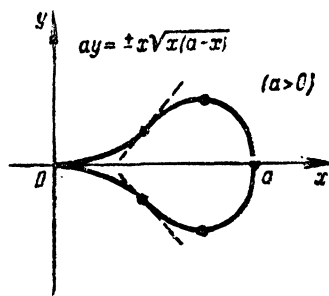
К задаче 1326.



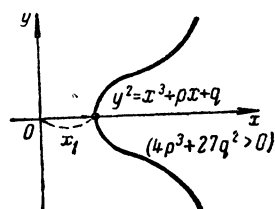
К задаче 1327.



К задаче 1328.

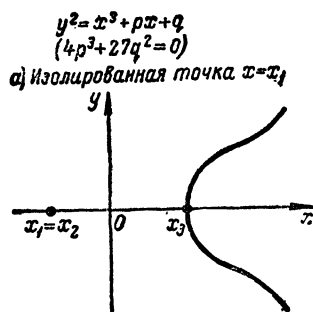


К задаче 1329.

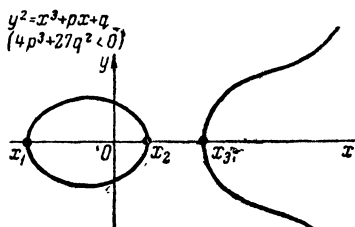


$x_1$  — корень уравнения  
 $x^3 + px + q = 0$

К задаче 1330.

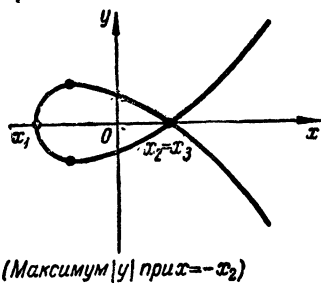


б) Двойная точка  $x = x_2$

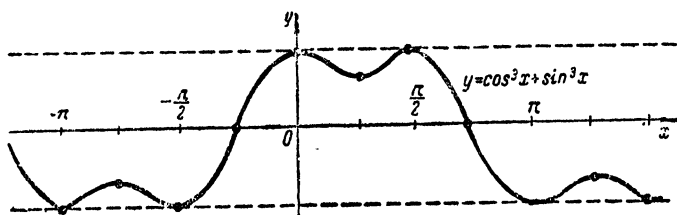


$x_1 < x_2 < x_3$  вещественные корни  
уравнения  $x^3 + px + q = 0$

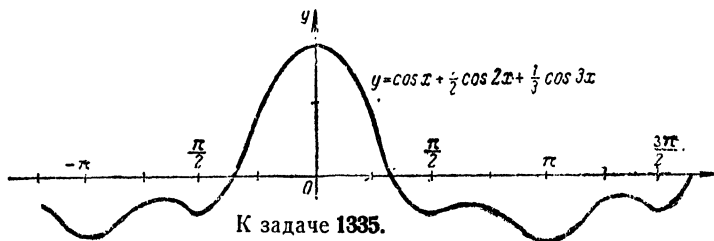
К задаче 1331.



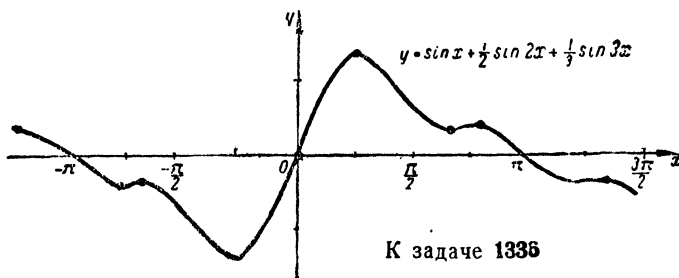
К задаче 1332.



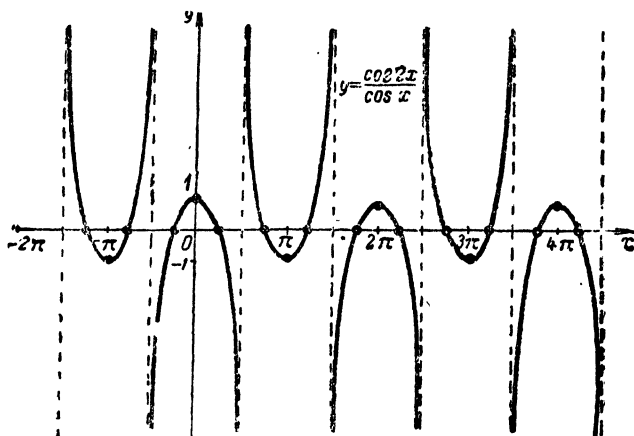
К задаче 1333.



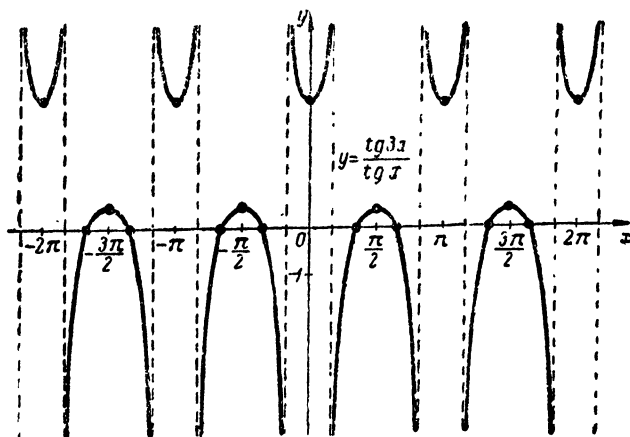
К задаче 1335.



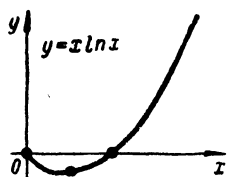
К задаче 1336



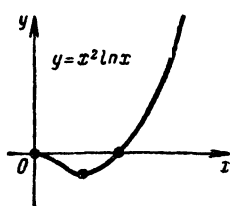
К задаче 1337.



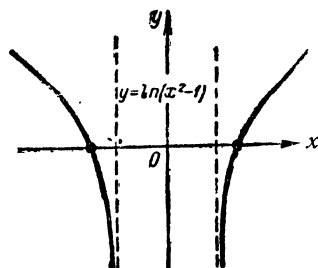
К задаче 1338.



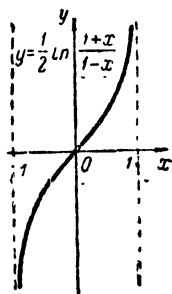
К задаче 1341.



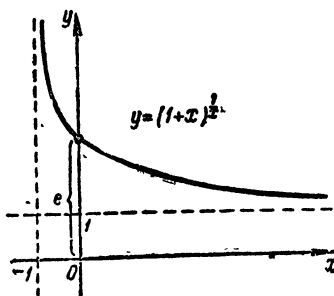
К задаче 1342.



К задаче 1343.



К задаче 1344.



К задаче 1345.

при  $x$ , равных корням уравнения  $x = \operatorname{tg} x$ . Затухающие волны почти постоянной длины. **1340.** Волны постоянной высоты, но с уменьшающейся длиной. **1341.** Минимум  $y$  при  $x = \frac{1}{e}$ . Выпуклость вниз. При  $x=0$  точка прекращения. См. чертёж

на стр. 199. **1342.** При  $x = e^{-\frac{3}{2}}$  точка перегиба. При  $x = 0$  точка прекращения.

Минимум  $y$  при  $x = e^{-\frac{1}{2}}$ . См. чертёж на стр. 199. **1343.** Асимптоты  $x = \pm 1$ . Выпуклость вверх. См. чертёж на стр. 199. **1344.** Асимптоты  $x = \pm 1$ . Возрастающая ордината. Точка перегиба  $x=0$ . См. чертёж на стр. 199. **1345.**  $y$  — убывающая функция. Асимптоты  $x = -1$ ,  $y = 1$ . См. чертёж на стр. 199. **1346. 2. 1347. 2. 1348.** Один вещественный корень при  $a < 1$  и три — при  $a > 1$ . **1349.** При  $a > 0$  один корень; при  $0 > a > -\frac{1}{e}$  два корня. При  $a < -\frac{1}{e}$  нет корней. **1350.** При

$a > e^{-1}$  нет корней, при  $0 < a < \frac{1}{e}$  два корня, при  $a < 0$  один корень. **1353.**  $m < 11$ .

**1354.**  $m > 175$ ;  $27m < -188$ . **1355.**  $0 < 16m < 621$ . **1356.**  $m = 72$ ;  $27m = -860$ .

**1357.**  $m = -1$ . **1358.**  $m > 0$ . **1359.**  $2m = \pm (3\pi - 2)$ . **1360.**  $s = a^2$ . **1361.**  $2a^2$ .

**1362.** Сторона, параллельная основанию сегмента, должна стягивать дугу  $2\varphi$ ,

где  $4 \cos \varphi = \cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}$ . **1363.**  $\frac{2m^3}{3p \sqrt{3}}$ . **1364.**  $\frac{ah}{4}$ . **1365.** Если

$x$  — сторона вырезанного квадрата, то  $6x = a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ . **1366.** Если

$x$  — основание, а  $y$  — высота поперечного сечения, то  $y = x \sqrt{2}$ . **1367.**  $a^2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}$ .

**1368.**  $\frac{4}{3} \pi a^3$ .  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . **1369.**  $\pi m^3$ . **1370.**  $2\pi a^2$ . **1371.**  $\frac{4\pi r^2 h}{27}$ . **1372.**  $\frac{\pi a h^2}{4}$ .

**1373.**  $\frac{4}{3} \pi a^3 \frac{8}{27}$ . **1374.**  $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$ . **1375.**  $\frac{8}{3} \pi a^3$ . **1376.**  $\frac{\pi a^3}{6 \sqrt{3}}$ . **1377.** Высота

искомого цилиндра  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ . **1378.**  $\frac{2\pi}{9 \sqrt{3}} l^3$ . **1379.** Центральный угол  $\varphi =$

$= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ . **1380.**  $60^\circ$ . **1381.**  $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . **1382.**  $r^2(v_1^2 + v_2^2) = (av_2 - bv_1)^2$ .

**1383.**  $a^2 = (lt + a - x_1)^2 + (mt + b - y_1)^2 + (nt + c - z_1)^2$ , где  $(l^2 + m^2 + n^2) t = l(x_1 - a) + m(y_1 - b) + n(z_1 - c)$ . **1385.** Если  $x < b$ , то ломаная  $ABC$ , где координаты точки  $C$  такие:  $y_1 = 0$ ,  $x \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = av_1$ . При  $x > b$  — прямая  $AB$ .

**1386.**  $l = (a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ . **1387.**  $mx^2 = 2ap$ . **1388.**  $t(v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha) = lv + l_1v_1 - (lv - lv_1) \cos \alpha$ . **1389.** При  $l > 4a$  равновесия нет. При  $l < 4a$

для угла  $\varphi$  наклона стержня имеем равенство:  $16a \cos \varphi = l + \sqrt{l^2 + 128a^2}$ .

**1390.** Если  $\varphi$  — угол наклона стержня к горизонту, то  $2 \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi = \sin(\alpha - \beta)$ . **1391.** Когда квадраты расстояний точки до центров относятся, как кубы радиусов. **1392.** Третья касательная должна быть перпендикулярна к биссектрисе угла между первыми двумя. **1393.** Если стороны принять за оси, а координаты точки равны  $a$  и  $b$ , то для угла  $\varphi$  прямой с осью  $x$  имеем фор-

мулу  $\operatorname{tg} \psi = -\sqrt{\frac{3b}{a}}$ . **1394.** Отверстие должно быть на середине высоты.



**1395.** Прямая должна делиться в данной точке пополам. **1397.** Когда плоскость проходит через середины четырёх рёбер. **1398.** Когда вершина — на середине стороны. **1399.**  $\frac{1}{2}lr\sqrt{3}$ , где  $l$  — образующая,  $r$  — радиус основания. **1400.** Искомая нормаль должна составлять с осью параболы угол  $45^\circ$ . **1401.** В центр круга. **1402.** Наибольшая поверхность достигается при  $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}$ , где  $\varphi$  — наклон граней у вершины  $O$  к плоскости основания. **1409.** Сходится при  $|x| < 1$ , расходится при  $|x| > 1$ . **1410.** То же. **1411.** То же. **1412.** Сходится при любом  $x$ . **1413.** Сходится при  $|x| < 1$ , расходится при  $|x| > 1$ . **1414.** Сходится при любом  $x$ , не равном нулю или целому отрицательному числу. **1415.** Сходится при любом  $x \neq 0$ . **1416.** Сходится при всяком  $x$ . **1417.** Сходится только при  $x = 0$ . **1418.** Сходится только при  $|x| < 1$ . **1419.** Сходится при  $|x| < \frac{1}{2}$ , расходится при  $|x| > \frac{1}{2}$ . **1420.** Сходится при  $|x| < e$ , расходится при  $|x| > e$ . **1421.** Сходится при  $|x| < 2$ , расходится при  $|x| > 2$ . **1422.** Сходится при  $|x| \leq 1$ , расходится при  $|x| > 1$ . **1423.** Сходится при  $x > 0$ , расходится при  $x < 0$ . **1429.** Расходится. **1430.** Сходится. **1431.** Расходится. **1432.** Сходится. **1433.** Сходится. **1434.** Сходится при  $\sigma > 0$ . **1435.** Сходится. **1436.** Сходится. **1437.** Всегда сходится. **1438.** Сходится при  $x \neq 2\pi$ . **1439.** Сходится. **1440.** Сходится. **1459.**  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right]$ . **1461.**  $2 - 7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$ . **1462.**  $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$ . **1472.**  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots; |x| \leq 1$ . **1473.**  $2 \left[ \frac{x}{a} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{a} \right)^5 + \dots \right]; |x| < a$ . **1474.**  $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{3} \frac{x^n}{n}$ . **1475.**  $\ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots$ . **1476.**  $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \frac{x^n}{n}$ . **1477.**  $1 + \frac{3x}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2x^n}{n(n^2-1)}$ . **1492.**  $\frac{1}{(1-x)^2}$ . **1493.**  $(1-x)^2 s = 1+x$ . **1494.**  $(1-x)^3 s = 1+x$ . **1495.**  $(1-x-x^2-x^3) s = 1$ . **1496.**  $ss_1 = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots$ . **1500.**  $\frac{1}{1+x}$ . **1501.**  $\frac{1}{1+x^2}$ . **1502.**  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x$ . **1503.**  $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = e^x$ . **1509.**  $\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{7x^4}{192} - \dots$ . **1510.**  $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \dots$ . **1511.**  $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$ . **1512.**  $-\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{1}{720}x^3 + \frac{x^5}{30240} - \dots$ . **1513.** а)  $\frac{3}{2}$ , б)  $4\frac{9}{10}$ , в)  $9\frac{1}{6}$ , д)  $15\frac{1}{3}$ , е)  $15\frac{1}{2}$ . **1514.**  $3\frac{2}{405}$ ,  $2\frac{1}{448}$ ,  $2\frac{1}{768}$ ,  $2\frac{3}{5120}$ . **1516.** Если вычислить указанные корни с помощью семизначных логарифмов, то получится: а) 3,107233; б) 4,121286; в) 7,937006; д) 3,017088; е) 7,745966; ф) 9,165151. Если же вычислять по приближённой формуле задачи 1515, то получаются числа: а) 3,1071; б) 4,12121; в) 7,937008; д) 3,017089; е) 7,74603; ф) 9,16514. **1517.**  $\sqrt[3]{2} = 1,2599210499$ . **1518.**  $\sqrt{2} = 1,4142135624$ . **1524.**  $1,4'$ . **1525.** В 114,6 раза. **1526.** Около  $41'$ . **1527.** Около 3 м.м и 11 м. **1528.** Около 5 м. **1530.** Расстояние 11,99 м. **1531.** 0,01745. **1532.** 0,9985. **1533.** 0,1736. **1534.** 3,1415926536.

**1535.** Около 510 и 130. **1537.**  $\frac{1}{m}$ . **1538.**  $-\frac{3}{5}$ . **1539.**  $\frac{1}{2}$ . **1540.**  $-\frac{1}{2}$ .  
**1541.**  $\frac{a^2}{b^2}$ . **1542.** 2. **1543.** 0. **1544.** 0. **1545.**  $\frac{2}{\pi}$ . **1546.** 1. **1547.** 1. **1548.** 0. **1549.** 0.  
**1550.** 1. **1551.** 0. **1552.**  $\frac{1}{2}$ . **1553.**  $\frac{2}{3}$ . **1554.** 1. **1555.**  $-\frac{1}{3}$ . **1556.**  $e^{-1}$ .  
**1557.** 4. **1558.**  $f''(x)$ . **1559.**  $f'''(x)$ . **1560.** 1. **1561.** 0. **1562.** 1. **1563.**  $e^{-1}$ .  
**1564.**  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . **1565.**  $e^{-\frac{a^2}{2}}$ . **1566.** 1. **1567.** 1. **1568.** 0. **1569.** 0. **1570.**  $-\frac{e}{2}$ .  
**1571.**  $-\frac{1}{2}$ , если  $x \rightarrow 0$ , оставаясь  $>0$ ;  $+\infty$ , если  $x \rightarrow 0$ , оставаясь  $<0$ .  
**1572.**  $\frac{2}{3}$ . **1573.**  $\frac{4}{3}$ . **1574.**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ . **1575.**  $s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2g}{a^2}$   
и  $s = \frac{gt^2}{2}$ . **1576.** Минимум  $z = -3(a^2 + b^2 - ab)$  при  $x = 2a - b$ ,  $y = 2b - a$ .  
**1577.** Максимум при  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{3}$ . **1578.** Минимум при  $x = \sigma \sqrt{2}$ ,  $y = -\sigma \sqrt{2}$ ,  
 $\sigma = \pm 1$ . При  $x = y = 0$  нет экстремального значения. **1579.** Минимум при  
 $3x = -4$ ,  $3y = 1$ . **1580.** Минимум при  $x = y = a \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$ . **1581.** При  $x = y = a$   
минимум, если  $a > 0$ ; максимум, если  $a < 0$ . **1582.** Если кривая  $z = 0$  — эллипс,  
а точка  $(x_0, y_0)$  — его центр, то при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  максимум, если  $A < 0$ , и  
минимум, если  $A > 0$ . Если кривая  $z = 0$  — не эллипс, то экстремального зна-  
чения  $z$  нет. **1583.** Минимум  $z$  при  $x = y = 3$ . Максимум  $z = a^3 + 27$ , если  
 $a \leq 9$ , и  $2a^3 - 9a^2 + 27$ , если  $a > 9$ . **1584.** Максимум при  $x = a$ ,  $y = a$  и  
равен  $2a^2$ , минимум при  $x = 1$ ,  $y = 0$  или  $x = 0$ ,  $y = 1$  и равен  $-1$ . **1585.** Если  
 $a > b$ , то максимум при  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ . Если  $a < b$ , то максимум при  $x = 0$ ,  
 $y = \pm 1$ . Если  $a = b$ , то максимум при  $x^2 + y^2 = 1$ . Наименьшее значение при  
 $x = y = 0$ . **1586.** Максимум при  $3x = 3y = 2a$ . **1587.** Максимум при  $ax = b$ ,  
 $ay = c$ . **1588.** Максимум при  $3x = 3y = \pi$ . **1589.** Максимум при  $6x = y = \pi$ ,  
минимум при  $2x = 2y = 3\pi$ ; максимум при  $6x = 6y = 5\pi$ . **1590.** Минимум при  
 $3x = 3y = \pi$  или  $2\pi$ . Максимум  $z = 1$ . **1591.**  $x - y = 2\pi n$  — максимум,  $x - y =$   
 $=(2n + 1)\pi$  — минимум, если  $ab > 0$ . Если  $ab < 0$ , то наоборот. **1592.** При  
 $x = a$ ,  $y = \beta$  максимум, при  $x = \pi - a$ ,  $y = \pi + \beta$  минимум. **1593.** Максимум при  
 $x = y = z = a$ . При  $x = y = z = 0$  нет экстремального значения. **1594.** Минимум  
при  $3x = -2$ ,  $3y = -1$ ,  $z = -1$ . **1595.** Минимум при  $x = y = z$ . **1596.** Минимум  
при  $x = y = z$ . **1597.** Максимум при  $mx = a$ ,  $my = b$ ,  $mz = c$ ,  $m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ .  
**1598.** Числа  $a, x_1, y_2, \dots, x_n, b$  должны составлять геометрическую прогрес-  
сию. **1599.** Минимум  $z$  при  $x = -2$ ,  $y = 0$ . Максимум при  $7x = 16$ ,  $y = 0$ .  
**1600.** Минимум  $z$  при  $3x = -1 - \sqrt{6}$ ,  $3y = 2$ . Максимум при  $3x = -1 + \sqrt{6}$ ,  
 $3y = 2$ . **1601.** Максимум  $z$  при  $3x = -1$ ,  $3y = 2$ ; минимум при тех же значе-  
ниях. **1602.** Максимум при  $x = y = 1$ , минимум при  $x = y = -1$ . **1603.** При  
 $x = 1$ ,  $y = 2$  нет экстремального значения. **1604.** При  $\pm x = a$ ,  $\pm y = a$  ма-  
ксимум  $z = a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ , минимум  $z = -a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ . **1605.** Максимум при  
 $x = y = -a\sqrt{2}$ , минимум при  $x = y = a\sqrt{2}$ . **1606.** Минимум при  $x = y = a$ .  
**1607.** Минимум при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ . **1608.** Максимум при  $x_1 = x_2 =$   
 $= \dots = x_n = a$ . **1609.** Максимум при  $x\sqrt{2} = y\sqrt{2} = \pm 1$ . Минимум при  
 $x\sqrt{2} = -y\sqrt{2} = \pm 1$ . **1610.** Максимум при  $x = y = z = +1$ , при  $x = -y =$   
 $= -z = +1$  и т. д.; минимум при  $x = y = z = -1$ ,  $x = -y = -z = -1$  и т. д.  
Максимум  $u = 1$ , минимум  $u = -1$ . **1611.** Минимум  $x = t\sqrt{a}$ ,  $y = t\sqrt{b}$ ,  
 $z = t\sqrt{c}$ ,  $t = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ . **1612.** Максимум  $u$  равен  $\left(\frac{a}{9}\right)^9$ . **1613.** Минимум

равен  $\frac{1}{7}(12 - \sqrt{18})$ , максимум  $\frac{1}{7}(12 + \sqrt{18})$ . **1614.** Наибольшее значение  $\frac{112}{27}$ , наименьшее 4. **1615.** Экстремальные значения  $u$  являются корнями уравнения  $\frac{l^2}{u-a^2} + \frac{m^2}{u-b^2} + \frac{n^2}{u-c^2} = 0$ . **1616.** Наибольшее значение  $\frac{1}{8}$ , наименьшее 0. **1617.** Максимум при  $3x = \pi$ ,  $6y = \pi$ . **1618.** Минимум равен  $\frac{1}{p} (\sqrt{\alpha_1 \beta_1} + \sqrt{\alpha_2 \beta_2} + \dots + \sqrt{\alpha_n \beta_n})^2$ . **1619.** Экстремальные значения в точках, где главные диаметры поверхности  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = M$  пересекают шар  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . **1620.** Экстремальные значения там, где оси симметрии эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $lx + my + cz = 0$  пересекают шар  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . **1624.** Равносторонний. **1625.** Равнобедренный. **1626.** Длина равна  $\sqrt{2ab} \sin \frac{\varphi}{2}$ , где  $a, b$  — стороны треугольника,  $\varphi$  — угол между ними. **1628.** Ортоцентрический треугольник, вершины которого — в основаниях высот данного. **1629.** Прямоугольник. **1630.** Координаты искомой точки равны арифметическим средним координат вершин. **1631.** Пересечение диагоналей. **1632.** Координаты её равны арифметическим средним координат данных точек. **1633.** Площадь четырёхугольника, вписанного в круг. **1634.** Многоугольник, вписанный в круг. **1635.** Площадь  $\frac{n}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{n}$  правильного многоугольника. **1636.** Площадь  $na^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$  правильного многоугольника. **1637.** Равносторонний треугольник. **1638.** Площадь его  $2R^2 \sin \alpha$ , где  $R$  — радиус круга. **1639.** Если  $s$  — площадь треугольника,  $a, b, c$  — стороны,  $x, y, z$  — расстояния точки до стороны, то  $(a^2 + b^2 + c^2)x = 2sa$ ,  $(a^2 + b^2 + c^2)y = 2sb$ ,  $(a^2 + b^2 + c^2)z = 2sc$ . **1640.** Плоскость, перпендикулярная к радиусу-вектору, проведённому из начала в данную точку. **1641.** Точка  $(a, 0, 0)$ , если  $a > b > c$ . **1642.**  $a^3$ . **1643.**  $a^3$ . **1644.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$ . **1645.**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$ . **1646.**  $x = y = z = h + l$ , где  $6hl^3 = v - 2h^3$ . **1647.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. **1648.** Высота параллелепипеда равна  $\frac{h}{3}$ , где  $h$  — высота конуса. **1649.** Если  $R$  — радиус основания конуса, то  $\pi R^2 \sqrt{3} = S$ . **1650.**  $R = l$ . **1651.** Касательная в этой точке должна быть параллельна прямой, соединяющей данные точки. **1652.**  $p \sqrt{5}$ . **1653.** Высота сегмента должна составлять  $\frac{3}{4}$  высоты треугольника. **1654.** Основание должно проходить через середину другой полуоси. **1655.** Абсцисса искомой точки  $x$  находится из равенства:  $(a^2 - b^2)x^2 = ma^2$ , если  $|am| < a^2 - b^2$ . При  $|am| > a^2 - b^2$  должно быть:  $\sigma = a \operatorname{sign} m$ . **1656.** Равнобедренный треугольник с вершиной на другой оси. **1657.** Нормаль должна проходить через точку  $(\pm \sqrt{\frac{a^8}{a+b}}, \pm \sqrt{\frac{b^8}{a+b}})$ . **1658.** Если  $a^2 > 2b^2$ , то нормаль проходит через точку  $x = \pm a^2 \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^4 - b^4}}, y = \pm b^2 \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^4 - b^4}}$ . Если же  $a^2 < 2b^2$ , то нормаль совпадает с малой осью эллипса. **1659.**  $x \sqrt{a+b} = \pm \sqrt{a^3}, y \sqrt{a+b} = \pm \sqrt{b^3}$ . Здесь  $x$  и  $y$  — координаты точки касания.

$$1660. S \sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2} = \pi abc \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \quad 1661. \frac{x}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{c^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{3}{c^2}}. \quad 1663. 2V = abh^2; \left( \frac{a\sqrt{h}}{2}, \frac{b\sqrt{h}}{2}, \frac{h}{2} \right) - \text{вершина парал-}$$

$$\text{лелепипеда. } 1664. \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} + \frac{z}{\sqrt{c}} = \sqrt{a+b+c} - \text{одна из восьми таких}$$

$$\text{плоскостей. } 1665. \text{ Точка касания плоскости } \left( \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \pm \frac{c}{\sqrt{3}} \right).$$

1666. Уравнение контура эксцентрика в полярных координатах имеет вид:  $r = a + b \cos(n\varphi + \alpha)$ . 1667. Контур диска должен состоять из двух спи-

ралей Архимеда  $r = a\varphi$ . 1668. Синусоидой. 1671. Астроида  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ .

1672.  $(x^2 + y^2)^3 = l^2 x^2 y^2$ . 1673.  $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2)$ . (Точка  $O$  принята за начало координат, прямая  $OO_1$  — за ось  $Ox$ ). 1674.  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-x}\right)^2 = 1$ .

1675.  $r^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x-a)^2(x^2 + y^2)$ . 1676.  $(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = 4a^2 y^2$ . 1677.  $(x^2 + y^2)y^2 = a^2 x^2$ . 1678. Две улитки Паскаля (см. отд. I, зад. № 129). 1679. Лемниската. 1680. То же. 1681. В полярных координатах:  $(r^2 - c^2) \sin \varphi = \pm a^2$ . При этом полюс — в середине отрезка между данными точками, а полярной осью служит сам отрезок. 1682.  $(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 (a^6 y^2 + b^6 x^2) = a^4 b^4 (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2$ . 1683. Окружность или лемниската (в зависимости от того, находятся ли вращающиеся стержни по одну и ту же или по разные стороны от оси  $Ox$ ). 1686. Парабола. 1687. Часть прямой  $x - y = 2$ , где  $x \geq 2$ .

1688. Отрезок прямой  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , заключённый между осями. 1689. Часть

параболы  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ , заключённая между точками  $(a, 0)$  и  $(0, a)$  её касания с осями. 1690.  $(2, 2)$  — самая левая,  $(6, -2)$  — самая низкая точка.

1691.  $x = a \cos t, y = b \sin t$ . 1692.  $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t$ . 1693.  $x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,

$y = \frac{2at}{1 + t^2}$ . 1700.  $t_1 t_2 t_3 (t_1 + t_2 + t_3) + (t_1 + t_2 + t_3)^2 + 3 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$ .

1702.  $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + 1 = 0$ . 1703.  $t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ . 1705. Пересекая лемнискату с окружностью  $x^2 + y^2 = at(x - y)$ , получим при соответствующем  $t$  любую точку кривой. Её координаты выразятся формулами:  $x = a \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 1}, y = a \frac{t(t^2 - 1)}{t^4 + 1}$ . 1708.  $45^\circ$ . 1709.  $u = b$ . 1710.  $a = 1$ .

1711.  $y = x$ . 1712.  $x = 0$  и  $y = 0$ . 1713.  $y = \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a}$ . 1717.  $\mu = \frac{\varphi}{2} + 90^\circ$ .

1718.  $y = x$ . 1719.  $x - y - 3 = 0$ . 1720.  $6x - 5y + 21 = 0$ . 1721.  $4x - 2y - 3a = 0$ . 1722.  $x = 2\pi a$ . 1723. Нормали в точках, где  $\varphi = \pm 30^\circ$  и  $\varphi = \pm 150^\circ$ .

1724.  $(x \pm y) \sqrt{2} = \pm a$ . 1715.  $x = y + 4$ . 1742. Подкасательная  $\frac{2r^3}{a^2}$ , поднормаль  $\frac{a^2}{2r}$ .

1745. Центр одного из кругов — в точке, где  $x = \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{\sqrt{41}}\right)a, y =$

$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{\sqrt{41}}\right)a$ . 1746. Центр одного из кругов — в точке  $(x, y)$ , где  $x\sqrt{5} =$

$= (3 + \sqrt{5})a, y\sqrt{5} = (6 + \sqrt{5})a$ . 1747. Центр круга — в точке  $(x, y)$ ,

где  $4\sqrt{2x} = \pi - 4$ ,  $4y\sqrt{2} = \pi + 4$ . **1749.** Тангенс наибольшей разности равен  $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$ . Сама она около  $11'$ . **1761.**  $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ . **1762.** Циссоида, асимптотой которой служит директриса параболы. **1763.**  $x = 0$  — касательная в вершине. **1764.** Лемниската. **1765.**  $(ax)^{\frac{n}{n-1}} \pm (by)^{\frac{n}{n-1}} =$

$= (x^2 + y^2)^{\frac{n}{n-1}}$ . **1766.** Логарифмическая спираль. **1767.**  $r^{\frac{n}{n+1}} =$

$= a^{\frac{n}{n+1}} \cos \frac{n\varphi}{n+1}$ . **1768.** Спираль Архимеда (см. ответ на задачу № 1667).

**1770.** Циссоида. **1771.** Окружность. **1772.** Окружность. **1773.**  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ;  $a^2 > b^2$ . При  $a^2 < b^2$  таких углов нет. **1774.**  $2(x^2 + y^2)^3 =$

$= a^2(x^2 - y^2)^2$ . **1775.** Парабола. **1776.**  $x = a\left(\frac{\pi}{2} + t - \frac{\pi}{2} \cos t\right)$ ,  $y = 2 + \frac{\pi}{2} \sin t$ , где  $t$  — тот же параметр, что и у циклоиды. **1777.** Удлиненная

циклоида Делагира. **1779.** Парабола. **1781.**  $y^3 + x^2\left(y + \frac{1}{2a}\right) = 0$  (циссоида).

**1783.**  $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$ . **1784.** При  $x < 0$ . **1785.** Выпуклость обращена к оси  $Ox$ . **1786.** Вогнутость к оси  $Oy$ . **1787.** Выпуклость к полюсу.

**1791.** 112 и 111 км. **1791.**  $\sqrt{\frac{(2a+3x)^3x}{3a^2}}$ . **1792.**  $p$ . **1793.**  $\frac{1}{6} \sqrt{1000}$ .

**1794.**  $\frac{13}{6} \sqrt{13}$ . **1795.**  $a$ . **1796.**  $\frac{a}{\cos \frac{x}{a}}$ . **1797.**  $at$ . **1798.**  $4a \sin \frac{t}{2}$ .

**1799.**  $\frac{4a}{3} \cos \frac{\varphi}{2}$ . **1800.**  $a$ . **1801.**  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ . **1802.** На конце большой оси;

равна  $\frac{a}{b^2}$  ( $a > b$ ). **1803.** В точке  $(0, 0)$ ; равна  $-\frac{2}{a}$ . **1804.** В точке  $(0, a)$ ;

равна  $\frac{1}{a}$ . **1806.**  $(2a, 2a)$ . **1807.**  $x_c = -\frac{a(2a^3 - x^3)}{(2a+x)(a-x)^2}$ ,  $y_c =$

$= \frac{2a(a+x)^{\frac{3}{2}}}{(2a+x)\sqrt{a-x}}$ . **1808.**  $(e^{-1}, 0)$ . **1809.**  $x_c = \frac{a}{2} + \frac{a}{6}(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$ ,  $y_c =$

$= \frac{a}{6}(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$ . **1810.**  $x_c = \frac{3a \cos^2 \varphi (1 + 8 \sin^4 \varphi)}{4(1 + 2 \sin^2 \varphi)}$ ,  $y_c = -\frac{6a \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi}$ .

**1820.**  $y = \sqrt{2b(a+b)}\left(\frac{x}{a+b} - 1 + \sqrt{1 - \frac{x}{a+b}}\right)$ . **1821.**  $y^4 \sqrt{2(a+b)^3} =$

$= x - a - b + \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b-x}$ . **1822.**  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$ . **1823.**  $y =$

$= \frac{h}{8} \left[ 3\left(\frac{x}{a}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 15\frac{x}{a} \right]$ . **1829.** Окружность  $x^2 + y^2 = ay$ , где  $2a$  —

радиус кривизны в данной точке (касательная в данной точке принята за ось  $x$ , нормаль — за ось  $y$ ). **1830.**  $x = a \cos t \cos 2t$ ,  $y = -b \sin t \cos 2t$ .

**1831.**  $4(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ . **1832.**  $27py^2 = 8(x-p)^3$ . **1833.**  $(ax)^{\frac{2}{3}} +$

$+(by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$ . **1834.**  $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$ . **1835.** Астроида

$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ . **1836.**  $\left(\frac{3y}{9}\right)^4 + 6a^2\left(\frac{3y}{8}\right)^2 + 3a^3x = 0$ . **1837.**  $(x+y)^{\frac{3}{2}} - (x-y)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{16a^3}$ . **1838.**  $x = a \ln \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} \pm \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a}$ . **1839.**  $x = \pi a + a(\tau - \sin \tau)$ ,  $y = -2a + a(1 - \cos \tau)$  (циклоида). **1840.** Кардиоида. **1841.**  $32a^2\left(x - a \arcsin \frac{y - \lambda}{4a}\right)^2 = y^2(20a^2 - y^2) + \lambda y(4a^3 + y^2)$ ;  $\lambda^2 = y^2 + 16a^2$ . **1842.** Гипоциклоида  $x = 3a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = 3a(2 \sin t + \sin 2t)$ . **1843.** Цепная линия  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ . **1844.**  $x = a(\arccos u - u^{-1} \sqrt{1-u^2})$ ,  $a \ln u = a + y$ . **1845.**  $x^2 + y^2 = a^2$ . **1846.** При том же полюсе и соответствующем повороте полярной оси уравнение эволюты:  $r_1 = e^{\varphi_1}$ . **1848.** 8a. **1849.**  $\frac{3a}{2}$ . **1850.** 8a. **1851.**  $\frac{8}{27}(19\sqrt{19} - 1)$ . **1852.**  $p(3\sqrt{3} - 1)$ . **1853.**  $\sqrt{1+a^{-2}}e^{\alpha\varphi_0}(e^{2\pi\alpha} - 1)$ . **1854.**  $y = \pm 1$ . **1855.**  $y = \pm x$ . **1856.** Контур квадрата  $|x| + |y| = 1$ . **1857.**  $\pm x \pm y = 1$ . **1858.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$ . **1859.** Гипербола, для которой стороны угла — асимптоты. **1860.**  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ . **1861.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$ . **1862.**  $x \sin \alpha = 2\sqrt{hy} - (y+h) \cos \alpha$ . **1863.**  $(x+y+b)^2 + (y-x+b)^2 = a^2$ . **1864.** Циклоида. **1865.** Циклоида. **1866.**  $x^2 + 2y^2 = 2a^2$ . **1867.**  $x^3 + xy^2 + py^2 = 0$ , если  $y^2 = 2px - \text{уравнение параболы}$ . **1868.** Если  $y^2 = 2px + p^2 - \text{уравнение параболы}$ , то огибающей будет 1) прямая  $x+p=0$  и 2) окружность  $2x^2 + 2y^2 = px + p^2$ . **1869.**  $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ , если  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 - \text{уравнение данного эллипса}$ . **1870.** 1)  $y=0$ , 2)  $x = a \frac{\sigma^5 + 3\tau}{\sigma^4 + 1}$ ,  $y = a \frac{2\sigma^3}{\sigma^4 + 1}$ . **1872.**  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$ . **1873.**  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$ . **1874.** Кардиоида. **1875.** Эпициклоида, у которой радиус катящегося круга равен половине радиуса неподвижного круга. **1876.**  $x = \frac{p}{2(1+2\lambda)} \frac{t^6 + 6(1+\lambda)t^4 + 6\lambda t^2 + 4\lambda^2}{3t^2 - 2\lambda}$ ;  $y = 4p \frac{t^3}{3t^2 - 2\lambda}$ . **1877.**  $(\sigma, -2\sigma)$ ,  $(2\sigma, -\sigma)$ ;  $\sigma = \pm 1$ . **1878.**  $(0, \pm 1)$ ,  $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$ ;  $(\pm 1, 0)$ ,  $\left(\pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . **1879.**  $\left(\frac{\sigma\sqrt[4]{3}}{4}, \frac{\sigma\sqrt[4]{27}}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{\sigma\sqrt[4]{27}}{4}, \frac{\sigma\sqrt[4]{3}}{4}\right)$ ;  $\sigma = \pm 1$ . **1880.** Вершины с касательными, параллельными оси  $Ox$ , — в точках  $(\pm a, \pm a)$ ; с касательными, параллельными оси  $Oy$ , — в точках  $((\pm 1 \pm \sqrt{2})a, 0)$ . **1881.**  $(2n+1)\pi x = 2$ . **1882.**  $\pm x \sqrt{2} = \sqrt{(2n+1)\pi}$ . **1883.**  $\frac{\pi}{6}$ . **1884.**  $x = \pm 1$ . **1885.**  $(0, a)$ ,  $(a, 0)$ . **1886.**  $(1, 0)$ . **1887.**  $x \sqrt{3} = \pm a$ . **1888.**  $x = 0$ . **1889.**  $x = 2$  и  $x = 6$ . **1890.**  $2x = -1$ . **1891.**  $x = e^{-\frac{3}{2}}$ . **1892.**  $x = n\pi$ . **1893.**  $8x = (2n+1)\pi$ . **1894.**  $6\varphi = \pm \pi$ . **1895.** Точка перегиба находится из уравнения  $2 \operatorname{tg}^3 \varphi + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi + 3 = 0$ . **1896.**  $(0, 0)$  — точка

возврата. **1897.**  $(0, 0)$  — двойная точка при  $a > 0$ , изолированная при  $a < 0$ , точка возврата при  $a = 0$  и  $b \neq 0$ . **1898.** То же. **1899.**  $(0, 0)$  — двойная точка. **1900.**  $(0, 0)$  — изолированная точка. **1901.**  $(0, 0)$  — тройная точка с совпадающей касательной  $y = 0$ . **1902.** То же, но с касательными  $x = 0$ ,  $y = x$ . **1903.**  $(0, 0)$  — изолированная точка. **1904.**  $4a^3 + 27b^2 = 0$ . **1906.**  $(0, 1)$  — точка прекращения. **1907.**  $(0, 0)$  — точка прекращения. **1908.** То же. **1909.** В начале координат разрыв. **1910.** Разрыв в начале координат. **1911.** Угловая точка в начале координат. **1912.** Конечный разрыв при  $x = 0$ . **1913.** Угловая точка при  $x = 0$ . **1914.** В окрестности точки  $x = 0$  бесконечное множество вершин. **1915.** То же. **1916.** То же. **1917.**  $(e, e)$  — двойная точка. **1918.**  $x = 1$ ,  $y = 1$ . **1919.**  $y = 0$ ,  $x = 3$ . **1920.**  $x = -1$ ,  $y = \pm 1$ . **1921.**  $y = x$ ,  $x = 0$ . **1922.**  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . **1923.**  $y = \pm(x + a)$ .  $x = a$ . **1924.**  $2y = \pm(2x - b)$ ,  $x = -b$ . **1925.**  $3y = 3x + 2$ . **1926.**  $x + y = 0$ . **1927.**  $x + y + a = 0$ . **1928.**  $x + y = 0$ . **1929.**  $r \sin \varphi = a$ . **1930.** Максимум  $|y|$  при  $2x = 3$ . Остриё в  $(0, 0)$ . При  $2x = 3 - \sqrt{3}$  точка перегиба. В точке  $(2, 0)$  касательная параллельна оси  $Ox$ . См. чертёж на стр. 208. **1931.** Псевдоквадрат с четырьмя осями симметрии.  $OA = a$ ,  $BC = a(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})$ . См. чертёж на стр. 208.

**1932.** Ещё большее приближение к квадрату.  $BC = a\sqrt{2}\left(1 - 2^{-\frac{1}{2n}}\right) \approx \frac{a}{2n}$ .

**1933.** Похожа на гиперболу. Асимптота  $2y = \pm x$ . Область существования:  $x^2 > 6$ . См. чертёж на стр. 208. **1934.** Область существования:  $|x| < 5$ . В начале координат двойная точка с касательными  $5y = \pm 4x$ . Максимум  $y$  при  $x = \pm\sqrt{20}$ . Минимум при  $x = \pm\sqrt{5}$ . См. чертёж на стр. 208. **1935.** Область существования:  $|x| < 1$ . В начале двойная точка с касательной  $y = 0$ . Максимум  $|y|$  при  $3x = 2$ .

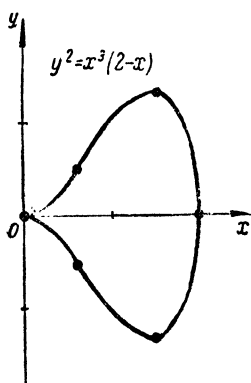
Точка перегиба при  $x = \sqrt{12} = \pm\sqrt{9 - \sqrt{33}}$ . См. чертёж на стр. 208. **1936.** В начале точка с двойной касательной  $y = 0$ . Вершины в точках  $(\pm 6, 12)$ ,  $(\pm 6\sqrt{2}, 8)$ . См. чертёж на стр. 208. **1937.** В начале точка самосоприкосновения.

Максимум  $|y|$  при  $x = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{8}$ . Область существования:  $-1 < x < 4$ .

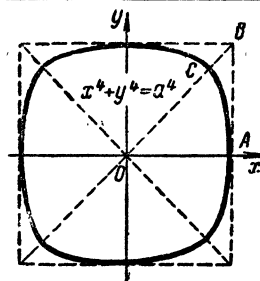
См. чертёж на стр. 208. **1938.** В начале — точка самосоприкосновения. При  $|x| < \sqrt{3}$  имеем  $y = \pm\sqrt{x + \sqrt{4x^2 - x^4}}$ . При  $\sqrt{3} < x < 2$  имеем  $y = \pm\sqrt{x \pm \sqrt{4x^2 - x^4}}$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — при  $x = \pm\sqrt{\frac{15 + \sqrt{33}}{8}}$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\pm\sqrt{3}, 0)$

и  $(2, \pm\sqrt{2})$ . См. чертёж на стр. 209. **1939.** При  $0 < y < 6$  имеем  $x = \pm\sqrt{-4y + \sqrt{16y^2 + 6y^3 - y^4}}$ , при  $-2 < y < 0$  имеем  $x = \pm\sqrt{-4y \pm \sqrt{16y^2 + 6y^3 - y^4}}$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, 6)$ ,  $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$ . В начале тройная точка с касательными  $y = 0$ .  $y = \sqrt{3} = \pm 2x$ . См. чертёж на стр. 209. **1940.** Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, \pm\sqrt{2})$ ,  $(0, \pm 2\sqrt{2})$ ,  $(\pm 2, \pm\sqrt{10})$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\pm 3, \pm\sqrt{5})$ ; точки  $(\pm 2, 0)$  — двойные. См. чертёж на стр. 209. **1941.** В начале двойная точка; оси координат — касательные.

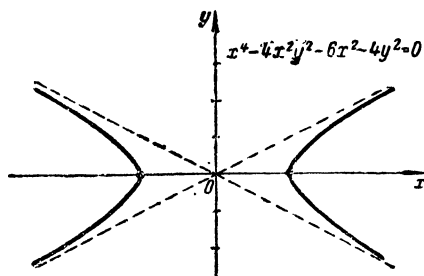
$x_1 = \sqrt[8]{\frac{3}{16}}$ ,  $y_1 = \sqrt[8]{\frac{27}{16}}$ . См. чертёж на стр. 209. **1942.** В начале двойная точка с касательными  $y = \pm x\sqrt{35}$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\frac{21}{8}, \pm\frac{7}{8}\sqrt{7})$ ,  $(\frac{10}{3}, \pm\frac{5\sqrt{5}}{3})$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(5, 0)$ ,  $(7, 0)$ ,  $(-\frac{1}{24}, \pm\frac{\sqrt{143}}{24})$ . См. чертёж на стр. 209. **1943.** Кардиоида —



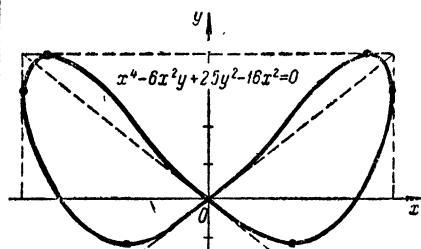
К задаче 1930.



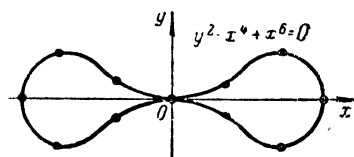
К задаче 1931.



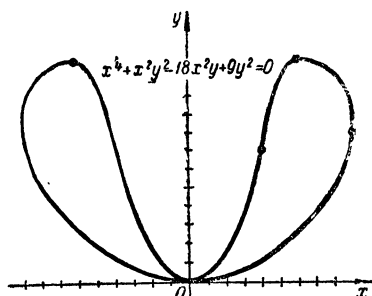
К задаче 1933.



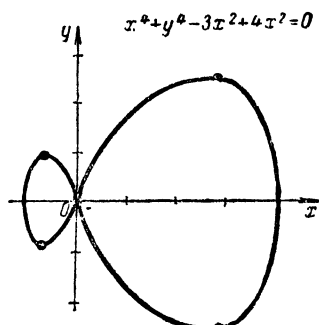
К задаче 1934.



К задаче 1935.

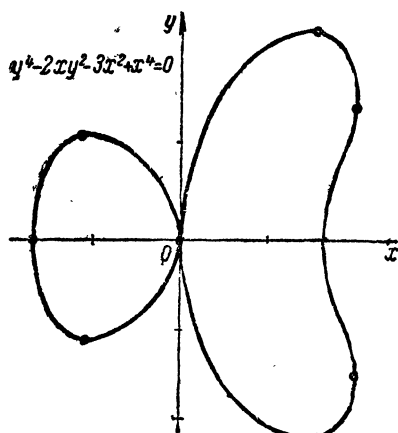


К задаче 1936.

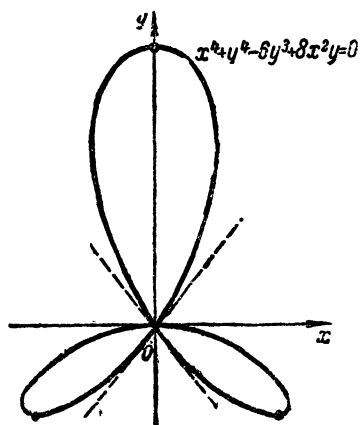


К задаче 1937.

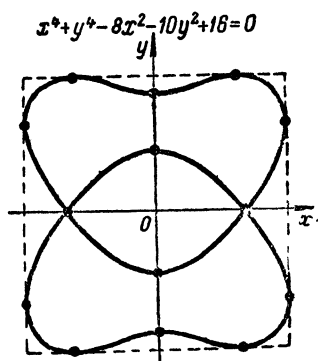




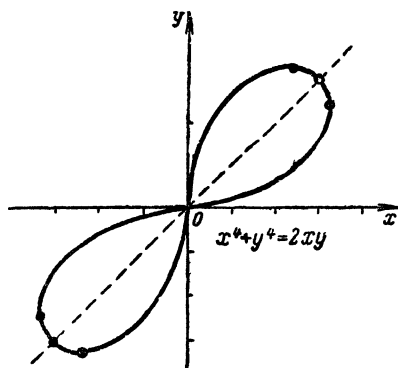
К задаче 1938.



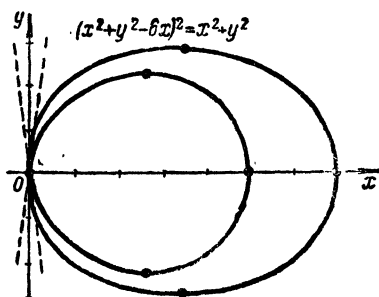
К задаче 1939.



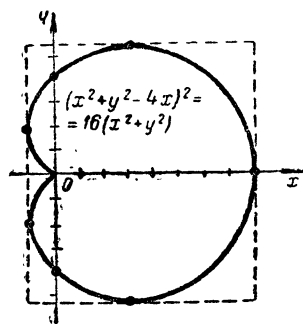
К задаче 1940.



К задаче 1941.



К задаче 1942.



К задаче 1943.

частный случай улитки Паскаля. В начале точка возврата с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(3, \pm \sqrt{27})$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(8, 0)$ ,  $(-1, \pm \sqrt{3})$ . См. чертёж на стр. 209. **1944.** Начало — тройная точка; оси координат — касательные в нём. Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\sqrt{12}, \pm \sqrt{6\sqrt{12}})$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(4, \pm 4)$ . См. чертёж на стр. 213. **1945.** Бисквит. Начало — изолированная точка. Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках

$(0, \pm 1), \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{8}}}{2} \right)$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках

$(\pm 1, 0), \left( \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{8}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ . См. чертёж на стр. 213. **1946.** Четырёхлепестник. Начало — четверная точка кривой; оси координат — касательные в нём. Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\pm \sqrt{2} \pm 2)$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$  — в точках  $(\pm 2, \pm \sqrt{2})$ . Прямые  $y = \pm x$  — оси симметрии. См. чертёж на стр. 213. **1947.** Лемниската. Начало — двойная точка; оси координат — касательные в нём. Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\sigma \sqrt[4]{3}, \sigma \sqrt[4]{27})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\sigma \sqrt[4]{27}, \sigma \sqrt[4]{3})$ , где  $4\sigma = \pm 1$ . Прямая  $y = x$  — ось симметрии. См. чертёж на стр. 213. **1948.** Точка

$(1, 0)$  — двойная с касательными  $y = \pm (x - 1)$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $\left( \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(0, 0)$ . См. чертёж на стр. 213. **1949.** Двойная точка в  $(0, 0)$  с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ :  $x + 1 = 0$ ; касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $x = -\frac{24}{25}$ . См. чертёж на стр. 213. **1950.** Начало — двойная точка с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(-4, \pm 4)$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(-5, 0)$ . См. чертёж на стр. 214. **1951.** Начало — тройная точка с касательными:  $y = 0, y = x, y = -x$ . Есть параболические ветви. Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $\left( \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{\frac{3}{5}} \sigma, \sqrt{\frac{6}{25}} \sqrt{\frac{3}{5}} \sigma \right)$ , касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $\left( \frac{\sqrt{2} \sqrt{3}}{3} \sigma, \frac{\sqrt{6} \sqrt{3}}{9} \sigma \right)$ ,  $\sigma = \pm 1$ . См. чертёж на стр. 214. **1952.** Начало координат — тройная точка с касательными  $x = 0$  и  $y = 0$ . Имеется касательная, параллельная оси  $Ox$ , и касательная, параллельная оси  $Oy$  (не считая касательных в начале координат). См. чертёж на стр. 214. **1953.** Начало координат — тройная точка с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(1, -1)$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $\left( \frac{2}{3} \sqrt[3]{4}, -\frac{8}{9} \right)$ . Криволинейная асимптота:  $y = x^2 +$

$\frac{2}{3} x$ . См. чертёж на стр. 214. **1954.** Начало — тройная точка с касательными  $y = 0, y = \pm \sqrt{2x}$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $\left( \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{16}{9} \right)$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\pm 2, 2)$ . Две параболические

ветви, на которых  $x^3: y \rightarrow -\sqrt[3]{2}$  при удалении в бесконечность. См. чертёж на стр. 214. **1955.** Асимптота  $y=x$ . В начале координат перегиб с касательной  $y=2x$ . Вершин нет. См. чертёж на стр. 215. **1956.** Асимптоты  $y = \pm x$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt[3]{2}, 0)$ . См. чертёж на стр. 215. **1957.** Асимптоты  $x=0$  и  $y=x$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, 0)$ ;  $(-\sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(\sigma, -\sigma)$ ;  $\sigma\sqrt[3]{4}=1$ . См. чертёж на стр. 215. **1958.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ . Касательная параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, -\sqrt[5]{\frac{9}{8}})$ . В начале — касательная  $y=x$ . Параллельная ей касательная — в точке  $(-\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2})$ . См. чертёж на стр. 215. **1959.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(-2, -\frac{1}{2})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(1, 1)$ . В начале — касательная  $x-2y=0$ . См. чертёж на стр. 215. **1960.** Асимптота  $x+y=0$ . В начале — точка перегиба с касательной  $x=0$ . Две вершины с касательными, параллельными оси  $Ox$ , в точках  $x = \frac{\pm 1}{(4 + \sqrt{5})\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$ ,  $y = \pm(\sqrt{5} + 1)x$ . См. чертёж на стр. 215. **1961.** Асимптоты  $y = \pm x$ . Касательные, параллельные осям, — в точках  $(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}})$  и  $(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}})$ . См. чертёж на стр. 216. **1962.** Асимптоты  $y = \pm x\sqrt[3]{3}$ . Касательные, параллельные оси  $Oy$ , — в точках:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$ ,  $(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, 0)$ . См. чертёж на стр. 216. **1963.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=x$ . В  $(0, 0)$  — перегиб с касательной  $y=-x$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\sigma, (\sqrt{2}+1)\sigma)$ ,  $(-\sigma, \sigma(\sqrt{2}-1))$ ;  $\sigma = \pm 1$ . См. чертёж на стр. 216. **1964.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(0, 1)$ . См. чертёж на стр. 216. **1965.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y = \pm x$ . Оси симметрии:  $y \pm (1 \pm \sqrt{2})x = 0$ . См. чертёж на стр. 216. **1966.** Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=x$ . Уравнение кривой в полярных координатах:  $r^4 \sin 2\varphi (1 - \sin 2\varphi) = 24$ . При  $\varphi = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$  величина  $r$  минимальная. См. чертёж на стр. 217. **1967.** Асимптота  $x+a=0$ . В начале — двойная точка с касательными  $y = \pm x$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(a, 0)$ ; касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \pm\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}a)$ . См. чертёж на стр. 217. **1968.** Асимптоты  $x-y \pm 1=0$ . В  $(0, 0)$  — двойная точка с касательными  $x=0$ ,  $y=0$ . См. чертёж на стр. 217. **1969.** Асимптоты  $y = \pm 2$ . Начало — двойная точка с касательной  $x=0$ . См. чертёж на стр. 217. **1970.** Асимптоты  $y = \pm x$ . В начале координат — двойная точка с касательными  $x=0$  и  $y=0$ . Пять точек перегиба. См. чертёж на стр. 217. **1971.** Асимптоты  $x = \pm 2$ . Начало — двойная точка с касательной  $y=x$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(\pm 2\sqrt{t(1-t)}, \pm 2t\sqrt{t(1-t)})$ , где  $t$  — корень уравнения  $t^3 + 2t - 1 = 0$  ( $t \approx 0,45$ ); касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ . См. чертёж на стр. 218. **1972.** Асимптоты

$y = \pm x$ . Пять точек перегиба. В начале координат — двойная точка с касательными  $2y \pm x = 0$ . Вершин нет. См. чертёж на стр. 218. **1973.** Асимптота  $y = 0$ . Особая точка  $(0, -1)$  — двойная, с касательными  $3y + 3 \pm \sqrt{3}x = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, \pm 2)$ . (Конхоида Никомеда.) См. чертёж на стр. 218. **1974.** Асимптоты  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm x$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\pm 2, 0)$ . Начало — двойная точка с касательными  $y = \pm 2x$ . См. чертёж на стр. 218. **1975.** Асимптоты  $y = 2$ ,  $x = \pm 1$ . Начало — двойная точка с касательными  $y = (1 \pm \sqrt{5})x$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(\frac{5}{4}, \frac{10}{3})$ . См. чертёж на стр. 218. **1976.** Асимптоты  $y = \pm x$ . Начало —

двойная точка с касательными  $2y = \pm \sqrt{2}x$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, \pm \sqrt{2})$ ,  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$  — в точках  $(\pm 1, 0)$ . См. чертёж на стр. 218. **1977.** Асимптоты  $y = \pm 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = -2$ . Начало — двойная точка с касательными  $x = \pm y \sqrt{3}$ . См. чертёж на стр. 219. **1978.** Асимптоты  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $x + y + 1 = 0$ . Начало — двойная точка с касательными  $2y = \pm \sqrt{2}x$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(4, -4 \pm 2\sqrt{2})$ . См. чертёж на стр. 219. **1979.** Асимптота  $x = 2a$ . Начало — точка возврата с касательной  $y = 0$ . (Циссоида Диоклеса.) См. черт. на стр. 219. **1980.** Асимптота  $x + y = 1$ . Начало — точка возврата с касательной  $y = 0$ ,  $(3, 0)$  — точка перегиба с касательной, параллельной оси  $Oy$ . В точке  $(2, \sqrt[4]{4})$  касательная параллельна оси  $Ox$ . См. чертёж на стр. 219. **1981.** Начало координат — точка возврата с касательной  $x = 0$ . Асимптоты  $x = 1$ ,  $y = x + \frac{1}{3}$ . Одна

касательная параллельна оси  $Ox$ . См. чертёж на стр. 219. **1982.** Скифоида. Асимптоты  $y + 1 = \pm x$ . Начало — тройная точка с касательными  $x = 0$  и  $y = 0$ . См. чертёж на стр. 220. **1983.** Асимптота  $4x - 8y - 1 = 0$ . Криволинейная асимптота  $8y = -16x^2 - 4x + 1$ . Начало — точка возврата с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{32})$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точке  $(-1, -1)$ . См. чертёж на стр. 220.

**1984.** Асимптоты  $8y = 1 \pm 4x \sqrt{2}$ . Криволинейная асимптота  $y = 2x^2 - \frac{1}{4}$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $(0, 0)$ ,  $(\pm 1, 1)$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\pm \sqrt{\frac{27}{32}}, \frac{9}{8})$ . См. чертёж на стр. 220.

**1985.** Асимптоты  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . См. чертёж на стр. 220. **1986.** Асимптота  $x + y = 0$ . Начало — тройная точка с касательными  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

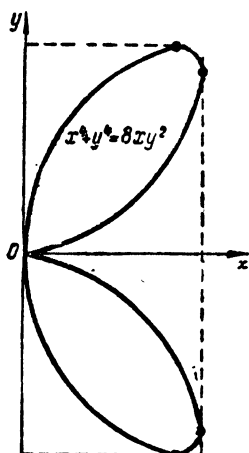
Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точках  $\pm (\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{5}})$ ; касатель-

ная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $\pm (\frac{\sqrt[10]{108}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[10]{48}}{\sqrt{5}})$ . См. чертёж на

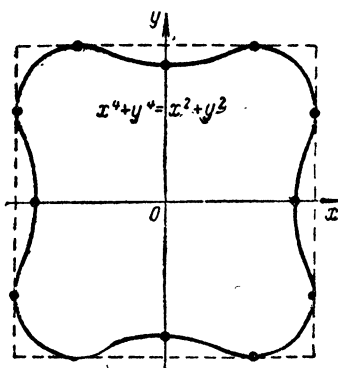
стр. 220. **1987.** Асимптота  $x = 1$ . Криволинейная асимптота  $y = \pm x \sqrt{x}(x-1) + x - 1$ . Начало — точка возврата с касательной  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — в точке  $(\frac{4}{3}, \frac{256}{27})$ . См. чертёж на стр. 220. **1988.** Асимптота  $x = 1$ .

Точка возврата  $(2, 0)$ . См. чертёж на стр. 221. **1989.** Асимптоты  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ ,

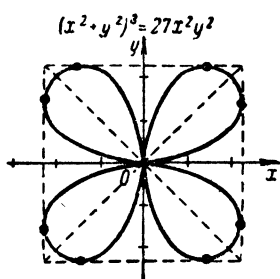
$y = 1$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — в точках  $(\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ . См. чертёж на стр. 221. **1990.** Асимптоты  $2y = \pm 1$ . Касательная, парал-



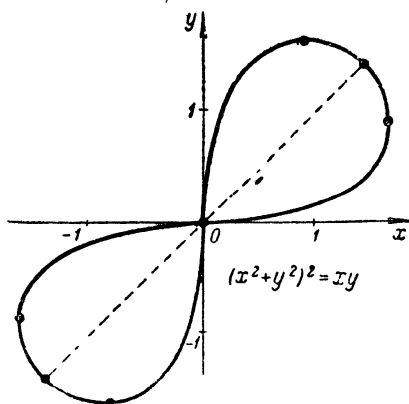
К задаче 1944.



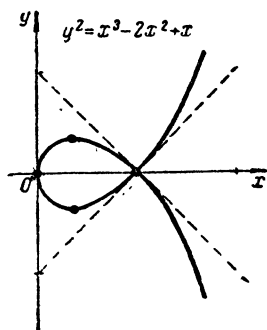
К задаче 1945.



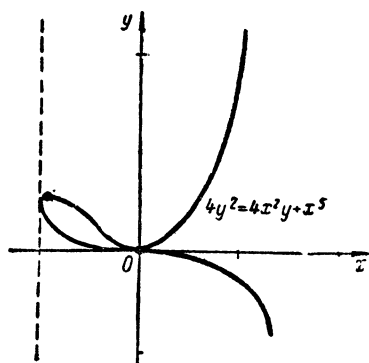
К задаче 1946.



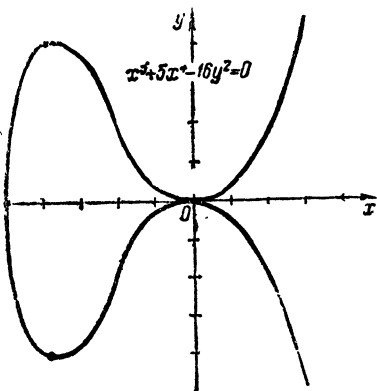
К задаче 1947.



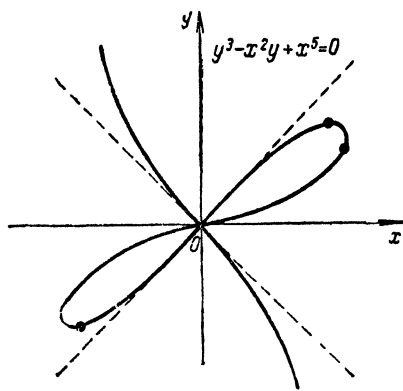
К задаче 1948.



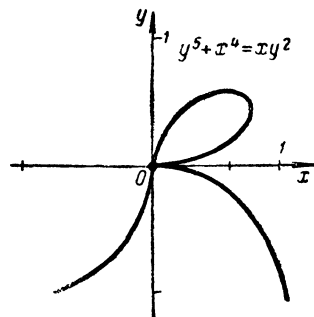
К задаче 1949.



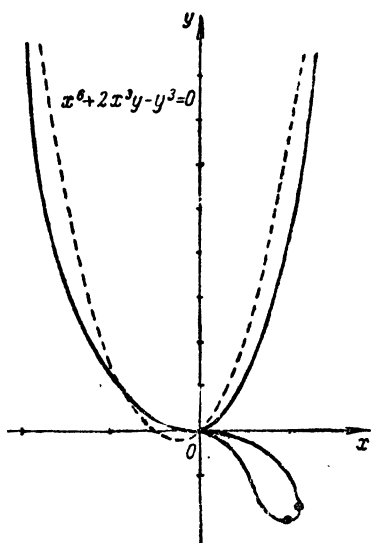
К задаче 1950.



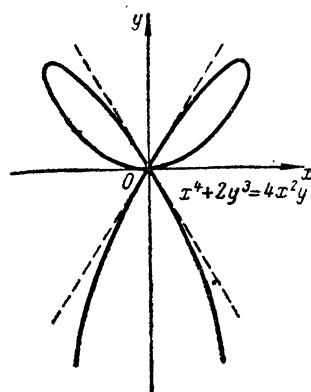
К задаче 1951.



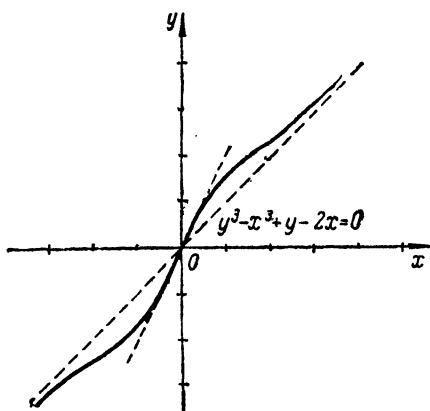
К задаче 1952.



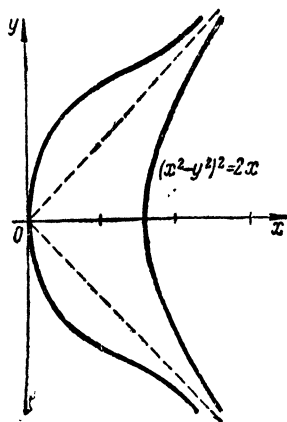
К задаче 1953.



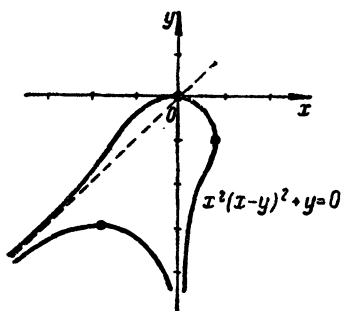
К задаче 1954.



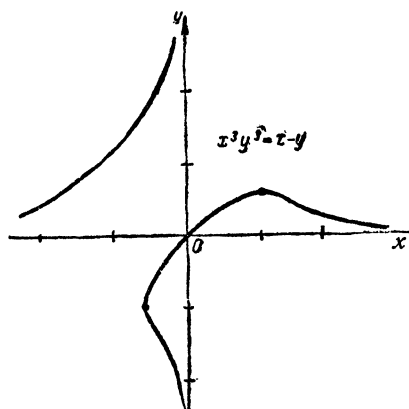
К задаче 1955.



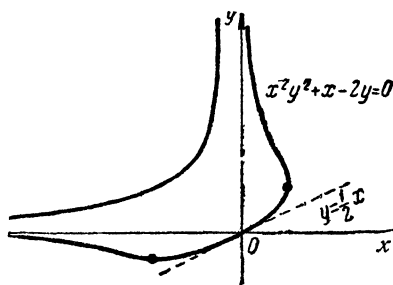
К задаче 1956.



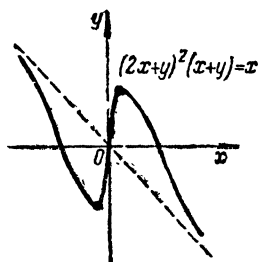
К задаче 1957.



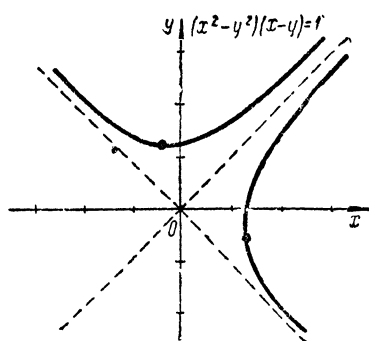
К задаче 1958.



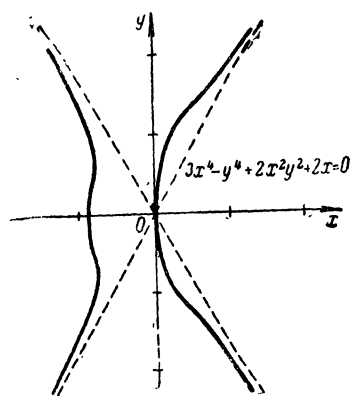
К задаче 1959.



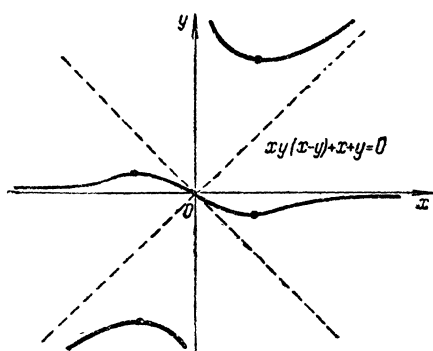
К задаче 1960.



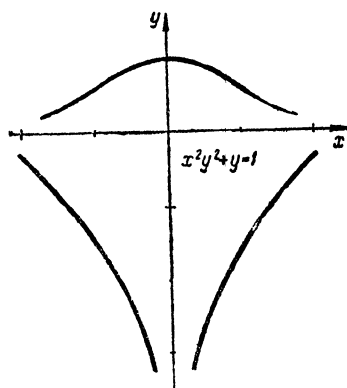
К задаче 1961.



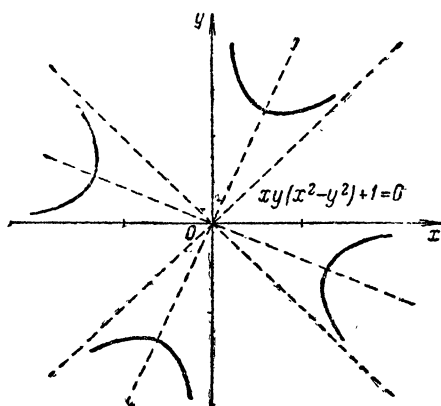
К задаче 1962.



К задаче 1963.

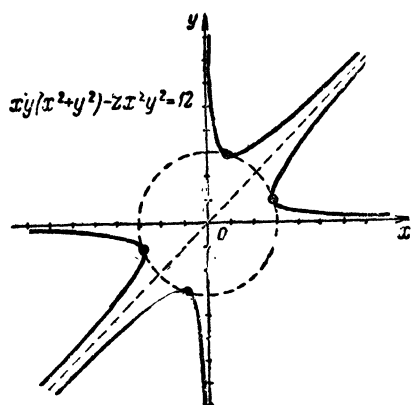


К задаче 1964.

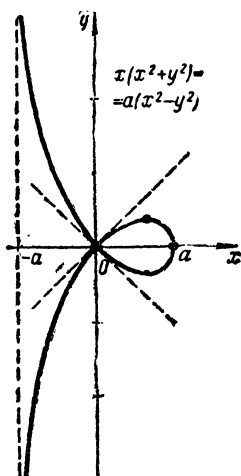


К задаче 1965.

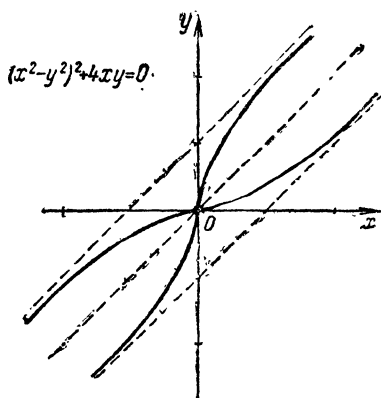




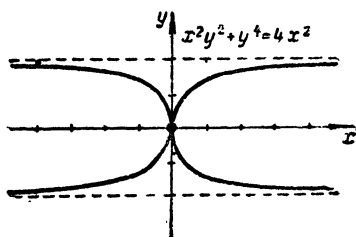
К задаче 1966.



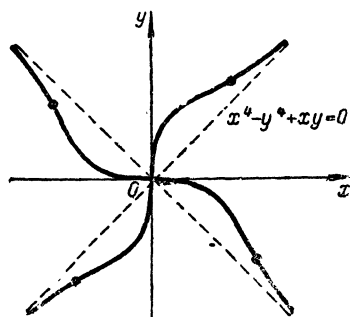
К задаче 1967.



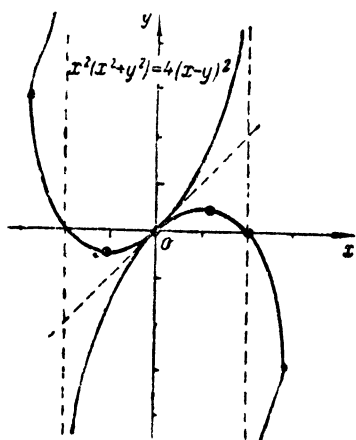
К задаче 1968.



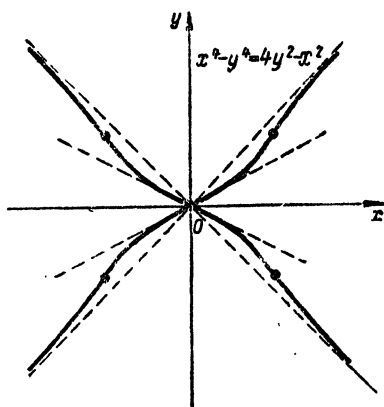
К задаче 1969.



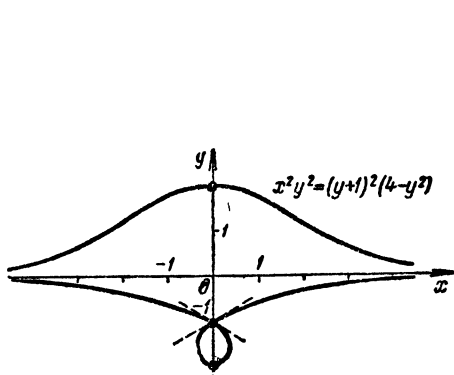
К задаче 1970.



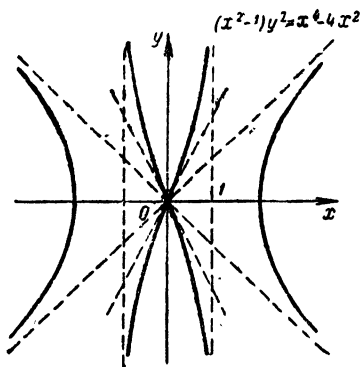
К задаче 1971.



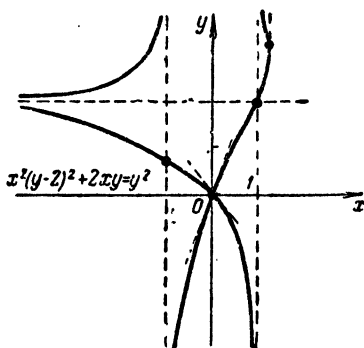
К задаче 1972.



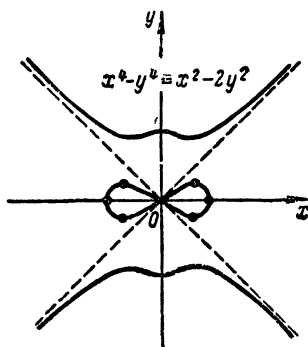
К задаче 1973.



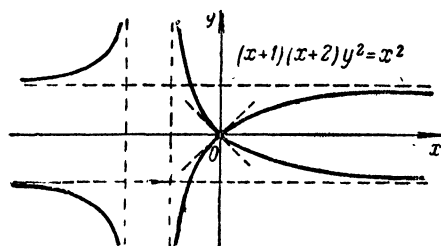
К задаче 1974.



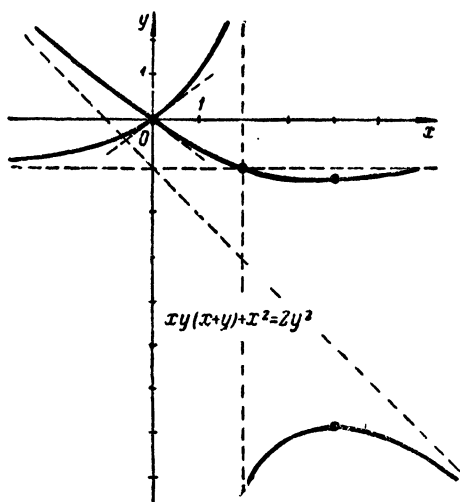
К задаче 1975.



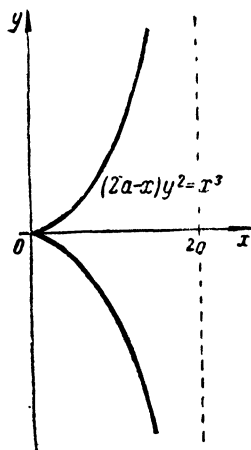
К задаче 1976.



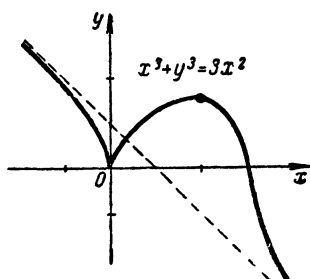
К задаче 1977.



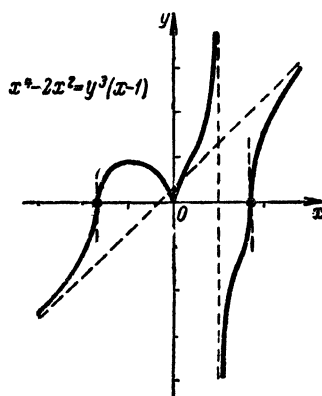
К задаче 1978.



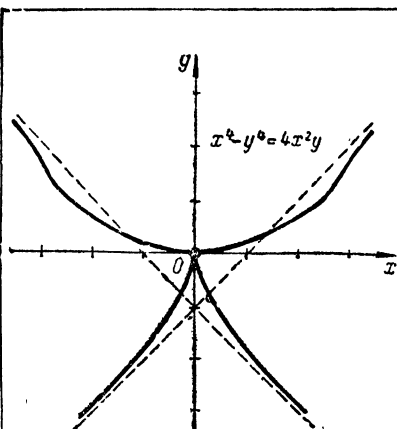
К задаче 1979.



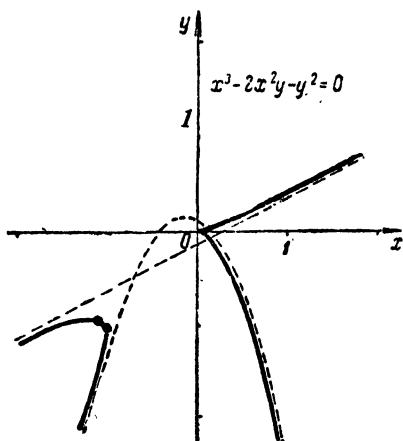
К задаче 1930.



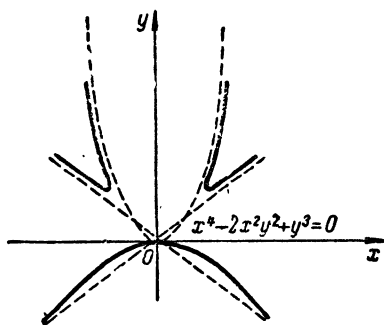
К задаче 1931.



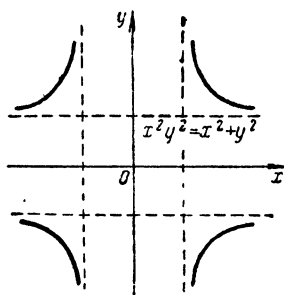
К задаче 1982.



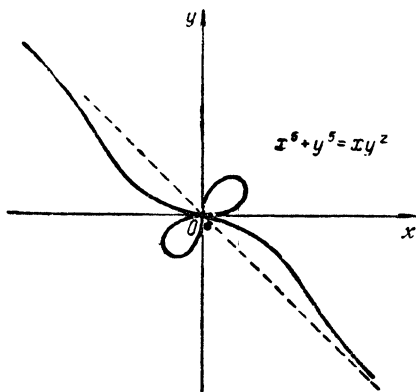
К задаче 1983.



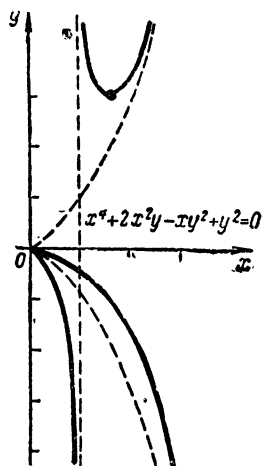
К задаче 1984.



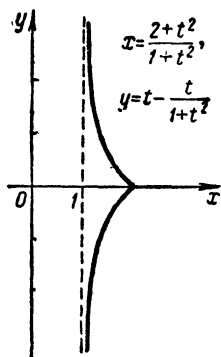
К задаче 1985.



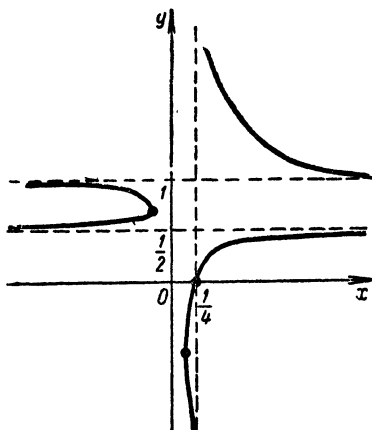
К задаче 1986.



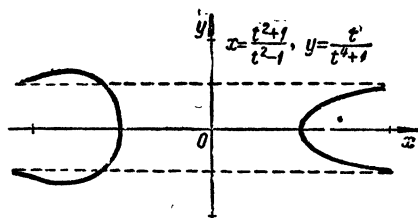
К задаче 1987.



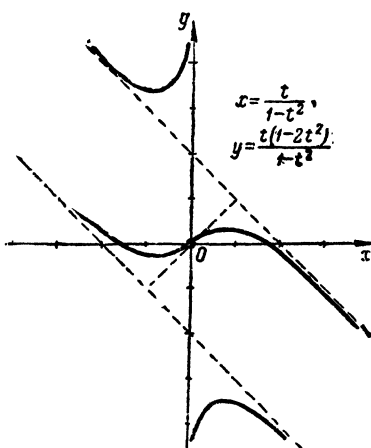
К задаче 1988.



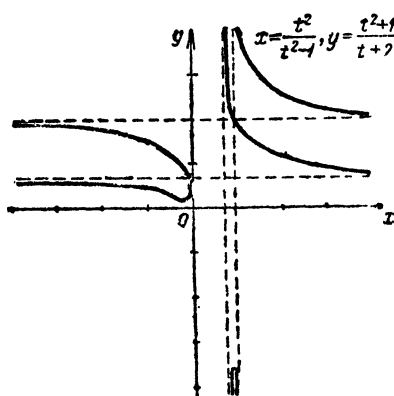
К задаче 1989.



К задаче 1990.

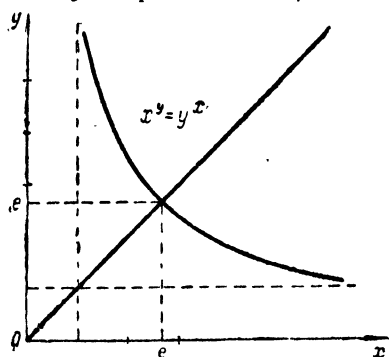


К задаче 1991.



К задаче 1992.

тельная ось  $Ox$ , — при  $t \sqrt[3]{3} = \pm 1$ ; касательная, параллельная оси  $Oy$ , — при  $t = 0$  и  $t = \infty$ . См. чертёж на стр. 221. **1991.** Асимптоты  $x + y \pm 2 = 0$  и  $x = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — при  $2t = \pm \sqrt{5 + \sqrt{17}}$ . См. чертёж на стр. 221. **1992.** Асимптоты  $x = 1$ ,  $3x = 4$ ,  $y = 2$ ,  $3y = 2$ . Касательная, параллельная оси  $Ox$ , — при  $t = -2 \pm \sqrt{5}$ , и параллельная оси  $Oy$  — при  $t = 0$ . См. чертёж на стр. 221. **1993.** Асимптота  $x = 1$ . Двойная точка в начале. Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — при  $t = 0$ . Две вершины с касательными, параллельными оси  $Ox$ . **1994.** Асимптоты  $x + 1 = 0$ . Двойная точка при  $t = 0$  и  $t = 1$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — при  $t = -1 \pm \sqrt{2}$ ; касательная, параллельная оси  $Ox$ , — при  $t$ ,



К задаче 2000.

равном корню уравнения  $t^3 + 3t - 2 = 0$ , т. е. при  $t = 0,596$ . **1995.** Асимптоты  $4y = 2x - 3$ ,  $2x + 1 = 0$ ,  $y = 0$ . Касательная, параллельная оси  $Oy$ , — при  $t = 0$  и  $t = 2$ . **1996.** Асимптоты:  $2x = 9$ ,  $2y = -9$ ,  $x - y = 6$ . При  $t = 0$  — точка возврата. При  $t = -2$  касательная, параллельная оси  $Ox$ , а при  $t = 2$  касательная, параллельная оси  $Oy$ . **1997.** В начале — тройная точка. Асимптота  $y = x + 1$ . Две параболические ветви. **1998.** Начало — двойная точка. Асимптота  $y = 0$ . Четыре точки, где касательная параллельна оси  $Ox$ . **1999.** Асимптоты  $y = \pm a$ . Начало — двойная точка. **2000.** Двойная точка  $(e, e)$ . Асимптоты  $x - 1 = 0$  и  $y - 1 = 0$ . См. чертёж.

**2002.**  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ . **2005.**  $x = a \sin^2 t$ ,  $y = a \sin t \cos t$ ,  $z = a \cos t$ .

**2007.**  $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$ ;  $z = 0$ . **2008.** В соответствующих полярных координатах  $r = e^\varphi$ . **2011.**  $\frac{4x - t^4}{4t^2} = \frac{3y - t^3}{3t} = \frac{2z - t^2}{2}$ . **2012.**  $\frac{4x - 1}{4} = \frac{3y + 1}{-3} = \frac{2z - 1}{2}$  и  $\frac{x - 4}{4} = \frac{3y + 8}{-6} = z - 2$ . **2013.**  $\cos \alpha = \sin^2 \frac{t}{2}$ ,  $\cos \beta = \sin \frac{t}{2}$ ,  $\cos \gamma = \cos \frac{t}{2}$ . **2014.** При  $t = \pi n$  касательная параллельна  $xOy$ ,

при  $t = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  касательная параллельна  $xOz$ . **2015.**  $x + 3y = 10$ ,  $3y + 4z = 25$ . **2016.**  $-4x + 3y + 6z = 47$ ,  $-4x + 4y = z + 6$ . **2017.**  $2m(x + y) = z + 2m^2$ ;  $x = \frac{y}{m}$ . **2018.**  $m \cos \alpha = \sqrt{a}$ ,  $m \cos \beta = \sqrt{b}$ ,  $m \cos \gamma = \sqrt{2z}$ ;  $m = \sqrt{a + b + 2z}$ . **2019.**  $M \cos \alpha = -mz$ ,  $M \cos \beta = z$ ,  $M \cos \gamma = mx - y$ ;  $M^2 = (m^2 + 1)z^2 + (mx - y)^2$ . **2020.**  $\frac{1}{\sqrt{2}}(p + q)$ .

**2021.**  $x + y + 4x_0z = 2x_0 + 8x_0^3$ . **2022.**  $(x \pm y) \sqrt{4a^2 - p^2} \pm pz = p \sqrt{4a^2 - p^2}$ .

**2025.**  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . **2036.** Окружность  $rx = -a \sin t$ ,  $ry = a \cos t$ ,

$rz = b$ ;  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . **2037.**  $x = \sin^2 t$ ,  $y = -\sin t \cos t$ ,  $z = \cos t$ . (Кривая Вивини, см. зад. № 2005). **2039.**  $6x - 8y - z + 3 = 0$ . **2040.**  $z = ay + b$ .

**2041.**  $x \sqrt{b \pm y} \sqrt{a} = 0$ . **2042.**  $-e^{-t}x + e^t y + z \sqrt{2 - 2t} = 0$ .

**2043.**  $bx \sin t - by \cos t + a(z - bt) = 0$ . **2044.**  $(a_2b_1 - a_1b_2)(x - x_0) + (a_2b_2 - a_1b_1)(y - y_0) + (a_1b - ab_1)(z - z_0) = 0$ . **2046.**  $xy_0 - x_0y = 0$ ,  $z = z_0$  — главная нормаль;  $x_0X + y_0Y = a^2$ ,  $a^2(X - x_0) = by(Z - z_0)$  — бином-

малы. **2047.** Бинормаль:  $x = 6t + 1$ ,  $y = -8t + 1$ ,  $z = -t + 1$ ; главная нормаль:  $x = -31t + 1$ ,  $y = -25t + 1$ ,  $z = 22t + 1$ . **2048.** Вектор бинормали  $B(1, -2t, t^2)$ , главной нормали  $N(2t + t^3, 1 - t^4, -t - 2t^3)$ . **2049.**  $x = 2t + \frac{1}{2}$ ,  $y = -2t + \frac{2}{3}$ ,  $z = t + \frac{1}{2}$  — бинормаль;  $x = 2t + \frac{1}{2}$ ,  $y = t + \frac{2}{3}$ ,  $z = -2t + \frac{1}{2}$  — главная нормаль. **2052.**  $\frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} = \sin x \cos x$ . **2053.** Винтовая линия  $x = (a + l) \cos t$ ,  $y = (a + l) \sin t$ ,  $z = bt$ . **2054.**  $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{b}$ . **2055.** Параметрическое представление точек поверхности:  $x = a \cos u + bv \sin u$ ,  $y = a \sin u - bv \cos u$ ,  $z = au + bv$ . **2056.**  $\rho \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = 4$ . **2057.**  $\rho \operatorname{sh} t = a \sqrt{2} \operatorname{ch}^2 t$ . **2058.**  $\rho \sqrt{2} = (x + y)^2$ . **2059.**  $\rho \sqrt{2} = 3e^t$ . **2060.**  $2\rho = a \operatorname{ch} t$ . **2061.**  $\rho \sqrt{a + b} = \sqrt{(a + b + 2z)^3}$ . **2062.**  $\rho = \sqrt{6}$ . **2063.**  $12\tau = 64y^6 + 36y^2 + 1$ . **2064.**  $a\rho = ar = (y + a)^2$ . **2065.**  $2abtr = (a^2 + b^2t^2)^2$ ;  $r = -\rho$ . **2067.** Если шаг винта равен длине окружности цилиндра. **2069.** Центр лежит на оси кривизны на расстоянии  $-r \frac{d\rho}{ds}$  от центра кривизны. **2070.**  $9r\xi^2 = 2\rho\eta$  — на соприкасающейся плоскости;  $6\rho r\xi = -\xi^3$  — на спрямляющей плоскости;  $9r\xi^2 = 2\rho\eta^2$  — на нормальной плоскости. **2076.**  $(mx - ly)^2 + (lz - nx)^2 + (ny - mz)^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$ . **2077.**  $(x + 4y + 9z)^2 = 14(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1)$ . **2078.**  $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz)$ . **2079.**  $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$ . **2030.**  $(bz - cy)^2 = 2\rho(z - c) \times (az - cx)$ . **2031.**  $c^2(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)(z + c)^2$ . **2032.**  $4(x^2 + y^2) = (z + 2)^2$ . **2033.**  $4xy + (z + 3c)^2 = 0$ , **2034.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ . **2035.**  $\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . **2036.**  $y^2 + z^2 = 2\rho x$ . **2037.**  $(\sqrt{x^2 + z^2} - a)^2 + y^2 = R^2$ . **2038.**  $y^4 = 4\rho^2(x^2 + z^2)$ . **2039.**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$ . **2090.**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$ . **2091.** Циклоида. **2092.**  $x = a \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = c \cos \theta$ . **2093.**  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ . **2094.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ . **2095.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . **2096.**  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$ . **2097.**  $xx_1 + yy_1 = zz_1$ . **2098.**  $x + y + 3z = 9$ . **2099.**  $xx_1^{n-1} + yy_1^{n-1} + zz_1^{n-1} = a^{n-1}$ . **2100.**  $(2r^2 - a^2)x_1x + (2r^2 + a^2)y_1y + (2r^2 - a^2)z_1z = r^4$ ;  $r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ . **2102.**  $x + y + z - 3 = 0$ . **2103.**  $x = x_1$ ,  $x_1y = az$ ;  $y = y_1$ ,  $y_1x = az$ . **2104.**  $x \sin v - y \cos v + \frac{uz}{k} = uv$ . **2105.**  $3x - 3y + z = 2$ . **2112.**  $x \cos u + y \sin u = a$ ;  $kau = az - k \times \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ . **2126.**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ . **2127.**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$ . **2129.**  $y^2 + z^2 = 1$ . **2130.**  $y^2 + z^2 = 2 - x\sqrt{2} + x^2$ . **2131.**  $(ny - mz)^2 + (lz - nx)^2 + (mx - ly)^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$ . **2132.**  $4(x^2 + y^2) = 4z + 1$ . **2133.**  $x^2 + \left[y \pm \frac{1}{2}\sqrt{q(p - q)}\right]^2 = pz + \frac{1}{4}pq$ . **2134.**  $a^2 - z^2 = (r \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2$ . **2135.**  $y^2 = 2(x + z)$ . **2136.**  $(\sigma x - \tau)^2 + (\sigma y - m\tau)^2 + (\sigma z - n\tau)^2 = p^2\tau^2$ , где  $\sigma = l^2 + m^2 + n^2 - p^2$ ,  $\tau = lx + my + nz$ . **2137.**  $|x| + |y| + |z| = 1$ . **2138.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$ . **2139.**  $xyz = c^3$ . **2140.**  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ ;  $(n + 1)^2 = n$ . **2142.**  $\frac{a^2}{c}$  и  $\frac{b^2}{c}$ . **2143.**  $p$  и  $q$ . **2144.**  $mR_1 = -mR_2 = u^2 + m^2$ . **2145.**  $aR_1 = (z + \sqrt{m^2 + z^2})m$ ,

$aR_2 = (z - \sqrt{m^2 + z^2})m$ ;  $m^2 = x^2 + y^2 + a^2$ . **2146.**  $R_1 = -R_2 = e^z + e^{-z} - \cos x \cos y$ . **2147.**  $R_1 = -R_2 = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$ . **2148.**  $R_1 = -R_2 = a \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ .

**2150.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми  $y = 0$ ,  $cx\sqrt{b^2 - c^2} \pm \pm az\sqrt{a^2 - b^2} = 0$ , если  $a > b > c$ . **2151.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми  $\begin{cases} z - 1 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z - 1 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$  **2152.**  $\frac{1}{k} = pq \left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$ . **2155.** Полная кривизна равна  $\frac{f'f''}{\rho(1+f'^2)^2}$ , средняя кривизна равна:  $\frac{1}{2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ f'' + \frac{f'(1+f'^2)}{\rho} \right]$ . **2157.**  $x^2 + y^2 + z^2 = px$ .

**2167.**  $(1 + f'^2) \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = r^2 (cr^2 - 1)$ ;  $c$  — постоянная.

---



